<36603953060016

<36603953060016

Bayer. Staatsbibliothek

Math Un 208

Mathesis. Introductio et historia. II.

R

Grundzüge

von

originellen

alten und neuen Systemen

und

Theilen der Mathematik

von

Dr. J. F. C. Werneburg

in Göttingen.

Aus fünf Abtheilungen bestehend.

Mit 1 Kupfertafel.

Leipzig und Eisenach.

1805.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Seiner kaiserlichen Majestät

Alexander dem Ersten,

Kaiser und Selbstherrscher aller Reussen,

dem erhabenen Beschützer,

dem mächtigen Beförderer

der

Warheit, Wissenschaften und Künste,

allerunterthänigst

geweihet.

Vorrede.

GrundZüge nur und Versuche einer vollendeten Konstruktion der gesammten Theile und Zweige der ganzen (reinen) Mathematik, Darlegung von Irrthümern als Folge der zeither scheinbar evidenten Methode der Mathematik durch eine eingreifende Kritik derselben und — keine vollendete ächt evidente philosophische Ausbildung und Konstruktion nicht blos der höher zu begründenden in dieser Wissenschaft absoluten GrundSätze, sondern auch in ihren Theilen und Verzweigungen — nach der mit solcher WissenSchöpfung erst zu erfindenden evidenten Methode soll man in dieser Schrift suchen.

Ich kenne die Forderungen der Philosophie an eine solche WissenSchöpfung der Mathematik hinläng-

länglich und würde sie versucht haben, wenn der bekannte geheime ZunftGeist von manchen Gelerten und manchen Verlegern nicht alle Kräfte, Mittel und Wege dagegen aufbót, selbst wenn man es wagte, aus reinem Eifer für Fortschreitung, des Ersatzes für seine darauf gewandte Zeit nicht blos nicht zu achten, sondern selbst vom wenigen Vermögen auf die Druck-Kosten zu verwenden. — Ich that dies: möchte aber für dergleichen, weil Verspottung der Dank und Lon war, und mein Leben mir theuer ist, ferner bedanken. Rezensenten, die nur manche Ausdrücke, Eigenheiten und WortSchreibungen aufstören, wenn sie der Sache mit aller Dialektik nichts anzuhaben vermögen, diese verbitte ich mir, nur solche, die jenen humanen philosophischen Geist, wie einige neuere in der Jenaischen Litt. Zeit., mögen diese Schrift in nötiger Verbindung mit allen meinen bereits erschienenen beurteln; dann werden sie nach aufmerksamer Durchlesung und Durchdenkung ein gründliches Urtel über meine Tendenz und über das Ganze fällen können, welches ich von der genannten Litt. Zeit. besonders wünsche. Ich verachte jedes unnötige Gepäcke bei allen Sachen, und so ließ ich auch das oft unnütze h weg. Kleingeister können sich nur hieran stoßen. Ferner weil das x in der Aussprache ein doppelter Konsonanz ist, nämlich ks, und das y in allen ursprünglich teutschen und griechi-

schen

schen Worten in der Aussprache ganz unser jetziges ü ist; so sahe ich nicht ab, warum ich nicht die ächten Buchstaben für die Laute z. B. in seün, Eksempel u. dergl. gebrauchen sollte.

Die sonstigen etwa stehen gebliebenen Druck- und andere Feler wird der verständige Leser selbst zu bessern wissen.

Obgleich diese Schrift aus 5 Abtheilungen und 1 Anhange oder unvollendet ausgefürten Abhandlungen besiehet, so machen sie doch ein Ganzes aus, so zeigt unter andern das Ende der 2ten, wie selbst die alten geometrischen Analüsten Archimedes und wie die neuen analütischen Geometer bei den Quadraturen irrten und jeder SachVerständige mag nun selbst beurteln, was für nachtheiligen Einfluß dies auf praktische Untersuchungen und für Verluste haben mußte: welche Einseitigkeit es seü, die Ellipse wie andere Kurven erst von KegelSchnitten abzuleiten, zeigt die erste Abhandlung, z. B. die reine Konstruktion der Ellipse hätte Euklid und seine Nachfolger sicher auf alle unsere PunkKreiße gefürt.

Ungern polemisire ich, doch wird man einmal dazu gereitzt, dessen man heut zu Tage gar nicht überhoben seün kann, so mag ich dann auch nichts schuldig bleiben. Wäre man so vernünftig gewesen, mei-

ner

ner ersten kleinen Schrift Gerechtigkeit und alsdann auch den übrigen widerfaren zu lassen, wie es die Sache und Vernunft von selbst fordert, so hätte ich ruhig meinen Gang gegangen und Polemik nie selbst kennen gelernt. Man scheide also auch jetzt, wer vernünftig ist, die Tendenz meiner Schriften von den Schlacken der Zeit und den Umständen und so werde ich bei künftiger Muße meine weitern Nachforschungen und lauter die Warheit aussprechen.

Johanni 1804.

Inhalts Anzeige.

1. Abtheil. Grund Züge von originellen alten und neuesten Theilen der Geometrie oder Raum- und Bewegungs Lere.

Absolutheit der dreierlei Räume.

Der Satz vor den Parallel Linien ist in sich selbst evident und absolut.

Neue mPunkt Kreiße und nPunkt Knoten Kreiße um mPunkte.

Eben so viele Hüperbeln als negative Kreiße.

Neue Spiral = und Rad Linien.

Normal Radien an den Kurven Bögen, als die Rektifikation dieser bedingende Linien.

2. Abtheil. Ware Rektifikationen, und Quadraturen des Zirkels, der Parabel, Ellipse, Hüperbel und der Rad Linie, one die geringste höhere Analüsis.

Direkter Beweis der absoluten Unendlichkeit der Rektif. und Quadratur des Zirkel Bogens.

Bestimmung der Abstralungs Winkels an den Enden dieser Kurven Bögen, der Tang., Sek., Sinus, Kosin., Kotang., Kosek., Subtang., Subsin., Normalen und Subnormalen,

len, Quernormalen, mittlern Normalen u. s. w. aus den Koordinaten und kleinen und großen Aksen und mittelst der letztern Normalen und Koord. die endliche Zirkulofikation dieser Linien und der RadLinie, rein analütisch geometrisch.

3. Abtheil. Zernichtung aller sogenannten abgekürzten RechnungsMethoden auf willkürliche Abkürzungen und Ergänzungen sich gründend; mithin besonders der Differenzial- und IntegralRechnungsMethode und jeder ihr änlichen FunktionenRechnungsMethode.

4. Abtheil. Die einst eingesandte Auflösung eines Problems (aus der unbestimmten geometrischen Analüsis,) von Don Augustin de Pedrayes, königl. spanisch. Professor der Mathem. in Madrid, aufgegeben.

5. Abtheil. Notwendige Theorie und Entstehung der UrrechnenLere oder Analüsis, Algebra, der Einungs- und Sonderungs- oder Kombinations-Lere und der besondern Arithmetiken oder ZalenSüsteme.

Anhang. Zweifel über die zeitherige Theorie der Bewegung der WeltKörper.

Ein-

Einleitung.

Wenn der entwönte Säugling zu stehen, wenn er zu gehen beginnen will; so forscht er nach etwas Festem, ich sage Festem, er greift darnach und nähert sich Stülen, Wänden und am liebsten erwachsenen Menschen, an welchen er sich selbst anhalten, in die Höhe richten, neben welchen er fußen kann. Hat er endlich Festigkeit im Stehen und im Alleinstehen erlangt, so lert er, selbst — gehen. —

Wenn der Säugling oder jetzt besser das Kind kleine Anhöhen im Hauße oder sonstwo herauf- und herabsteigen will, — wenn der Jüngling, wenn selbst der Mann mächtige Höhen oder Tiefen besteigen will, so fußt und schaut er auch zuvor, ob sichern Fußes, sichern Trittes er dieses könne. — Er forscht nach dem festen, sichern Grunde — er forscht nach festen unerschütterlichen Grundlagen (nach Prinzipien), damit er kein Unheil erleide, welches warscheinlichst beim Gegentheile der Fall seün könnte. — Daher derjenige, der nicht nach sichern, sondern nach oberflächlichen

lichen GrundLagen forscht, sich leicht in die Gefar begiebt, gleichsam am Abgrunde oder auf schwankendem Meere von jedem möglichen Unfalle bedrohet zu werden.

Eben so in wissenschaftlichen Tiefen und Höhen der Gelerte — mer nach der Wissenschaft erende, liebende Kopf. Deswegen fragt er üllerall in jeder Wissenschaft nach einem festen im absoluten, d. h. allgemeinen Wissen ergründeten Prinzip, (Grunde). Wo ihm dieses unsicher erscheint, ist: sollte und will er nach dem sichern trachten, sich seiner bemeistern; sonst sammelt er nur Aggregate, Fragmente von Kenntnissen, aber nie Wissenschaft, sich selbst Gränzen gebende Wissenschaft, die nur ein auf festen GrundLagen aufgerichtetes Süstem seün kann. —

Unter allen Wissenschaften, rümt man an der Mathematik, daß sie die erste, die vorzüglichste seü, die auf den festesten GrundLagen vor allen andern Wissenschaften ruhe, daß sie eine Evidenz ihrer Sätze aufweiße, deren sich keine der andern Wissenschaften in allen ihren Sätzen so ser rümen könne. —

Ich sollte meinen, alle und jede Wissenschaft sollte als Wissenschaft, da sie ja alle diesem nach im gesammten Wissen des Menschen gegründet sind, sich derselben rümen, schlechthin erfreuen können! Leider aber können sie dieser angerümten Evidenz sich noch nicht so ser erfreuen. Doch glücklicher Weise stralt in unserm ZeitAlter sichtlich diese zu erwartende Evidenz zum Theil gleichsam in der MorgenRöte, zum Theil gleichsam im Aufgange des Lichtes uns entgegen. Ueberall ist Tendenz darnach sichtbar. —

Sollte denn aber würklich die Mathematik sich dieser gerümten Evidenz one Vergleich in allen Theilen und

eines

eines systematischen oder wissenschaftlichen Zusammenhanges aller ihrer Sätze würklich rümen können? sollte sie sich selbst eines festen, absoluten, im menschlichen, mithin im philosophischen Wissen ergründeten Prinzips, bisher erfreuen, sie solches aufweißen können? — selbst den großen Umfang ihres Gebietes kennen? —

Leider wenn wir es mit andern gestehen sollen, wenn wir mit philosophischen Kriterien ihre Prinzipien, den Zusammenhang ihrer Sätze und Leren mit diesen und unter sich prüfen, leider nicht! — Würde sie es aber niemals können? — O ja! sie wird sie vielmer vor allen andern Wissenschaften erlangen. —

Diese bloßen GrundZüge sollen uns von dieser zeitherigen Unvollständigkeit der Prinzipien überzeugen, sie sollen uns aber auch feste Prinzipien leren, einst — finden leren. Selbst uns vielleicht Anleitung geben, wie sie von einigen andern Wissenschaften, wenn wir wollten, gefunden werden könnten. —

Nicht jener Tüpus der ZweiEinheit von Reflexion und Subsumtion nach jenem Schema von zwei Zweigen des Wissens und Seüns, der nach Sch—g's Ansicht statt finden soll, sondern jener UrTüpus, der allgemeine Tüpus der DreiEinheit des Absoluten nach den Potenzen des Endlichen, Unendlichen und Ewigen, welcher in der Philosophie waltet, muß nach mir, da alle Wissenschaften Töchter derselben sind, wiefern er absolut und war ist, auch in jeglicher einzeln walten, wiefern jede in sich ein Ganzes, ein relativ Absolutes konstruirt. So muß dem Menschen nach seinem Verstande jedes Begriffene in Zeit, in Raum, und der Süntheſis dieser beiden Antitheſen, der Kraft in Zeit und Raum fallen. "Der reinste und abstrakteste Begriff der

Einheiten, der der Zeiten stehet der Urarithmetik vor, welche nach dem gleichen Tüpus der DreiEinigkeit sich theilt in die Wissenschaft 1) der Operationen mit bestimmten Zalen, den Arithmetiken (ZalenSüstemen); 2) in die Wissenschaft der Operationen mit unbestimmten oder allgemeinen Zalen, der Analüsis und 3) in die Süntheſis beider, die Wissenschaft der Kombinationen beider, der allgemeinen und besondern Zalen, der KombinationsLere.

Die andere dreieinige Wissenschaft, welcher der Begriff der Räume vorstehet, wird Geometrie genannt, sie spaltet sich in die KörperLere, FlächenLere und LinienLere.

Der 3ten dreieinigen Wissenschaft steht der Begriff der (thätigen) Kräfte vor (Kraft ist thätige Materie, Materie leidende Kraft). Sie mag einstweilen den Namen Dünamik füren: wiefern die Kräfte in Körpern, Flüssigkeiten und Gasen ruhen, so hat man eine Petro- eine Hüdro- und GasoDünamik, wovon jedwede in eine Statik und Mechanik zerfällt, je nachdem Gleichgewicht der Kräfte vorhanden oder gestört ist. Als Süntheſis bedarf aber die Dünamik der Geometrie und Urarithmetik zu ihrer Konstruktion und Analüse. Urarithmetik, Geometrie und Dünamik sind die einzigen Zweige der (reinen) Mathematik, was man angewandte Mathematik zu nennen pflegte, ist mathematische Technik. — In dem eigentlichen Gebäude läßt sich nur dies alles gründlicher nachweißen.

Ich will ihnen, meine Leser, hierüber einige andere Autoritäten anfüren, damit man nicht glaube, es seü eine gewisse einseitige Arroganz von mir so zu reden.

Andere mer prüfende Mathematiker fanden und bezwecken dasselbe, z. B. Prof. Krauße, Hauf. —

An-

Andreas Schönberger, der WeltWeisheit Doktor und Ingenieur bei dem kaiserlichen königl. privilegirten SchiffartsKanal gab bei Trattner in Wien schon 1801 seine GrundLinien zu einer GrößenWissenschaft in ihrer Natur dargestellt, heraus. Er beginnt sogleich, wie folgt: "Die „Länge der Zeit, in welcher schon so viele der fähigsten „Köpfe unter dem menschlichen Geschlechte ihre Kräfte auf „die mathematischen Wissenschaften verwendet haben: — „Die vielen guten Bücher, welche schon über alle Theile „derselben erschienen sind, sollten einen nun vermuten las„sen, daß in keinem Theile derselben noch Etwas eigen„thümlich Neues und Wichtiges gesagt werden könne. „Und dennoch bin ich der festen Meinung, daß in der rei„nen Mathematik eigentlich noch das Wichtigste und In„teressanteste neu gesagt werden kann und muß. Den Be„weis hiezu liefere ich, unter der Bedingung, daß man in „solchen Sätzen und Begriffen mit mir einig ist.

„Jede Wissenschaft besteht aus zwei wesentlichen Be„standTheilen: ihrem Stoffe und ihrer Form, welche „letztere auch System heißen kann. In einer materia„len Wissenschaft bestimmt der Stoff; in einer for„mellen bestimmt die Form den Karakter derselben: „in jener ist also der Stoff; und dieser die Form der „wichtigste und interessanteste dieser BestandThei„le." — (Hier macht Hr. S. eine ser unrichtige Analüse und hat ser falsche Begriffe: Jede Wissenschaft hat nämlich Einen Gegenstand, faßt man diesen in seinem Prinzip rein auf, so hat man den Stoff, die Sache und zugleich die Form derselben, die schlechterdings durch die Sache begründet oder bedingt ist. Die Form in der Wissenschaft ist die Sümbolik für die Sache oder für die Dinge.

Die-

Diese kann freilich die der Sache am wenigsten angemessenste zeither gewesen seün. Nie aber kann Form den Karakter der Wissenschaft bestimmen. Wissenschaft ist nur Ein Ganzes und ist ihre Form unvollkommen, unvollständig, so ist auch sie es noch, und auch die Materie hat man dann noch nicht ganz und rein aufgefaßt. Durch die Materie einer Wissenschaft ist auch ihre Form begründet. Stoff und Form sind eins. Es giebt gar keine formelle Wissenschaften; nur Wissenschaften von allgemeinen, abstrakten und von besondern, konkreten (sinnlichen) Gegenständen (Materien) giebt es. — — Eben so wenig als es eine Logik als eine eigene Wissenschaft giebt, da das, was man dafür ausgiebt, nur Sümbolik der Philosophie ist, seün soll, eben so wenig giebt es überhaupt formelle Wissenschaften, sie sind alle materiell, d. h. sie haben Materie. Wol kann es einer Wissenschaft am Süstem gebrechen, und da dieses freilich die wesentliche Forderung an eine Wissenschaft ist; so mag es freilich um die Wissenschaft, wo kein strenges Süstem nach den Gesetzen des ErkenntnißVermögens erzeugt worden oder anzutreffen ist, schlimm aussehen. Doch man sieht aus dem Folgenden, daß er es mer in diesem Sinne meint und daß es ihm eben an richtiger Sümbolik für seine Begriffe gebrach.)

"Die reine Mathematik ist eine von den beiden formellen Wissenschaften! in ihr ist die Form, ihr notwendiges Süstem, welches aus den Gesetzen des ErkenntnißVermögen a priori erzeugt werden, und diese Wissenschaft in ihrer Natur darstellen muß, der wesentliche und interessanteste BestandTheil, der von ihr gesagt werden kann und muß.

„Daß aber die reine Mathematik, bis itzt, diesen wesentlichen BestandTheil noch entbere, und nur erst ein Zusam-

„sammenhang der mathematischen Warheiten ist, welche „einzelne große Männer, nach und nach erfunden, „und andere ebenfalls geschickte Männer in ein Gan„zes ausgearbeitet und geordnet haben; daß der „eine ihre Materien und ganze Abtheilungen so, und der „andere dieselben anders geordnet habe; daß demnach bis„her so viele Süsteme in ihr statt fanden, als Meinun„gen ihrer Kenner waren; daß dieselbe aber in dieser Wei„se nie zu dem Grade der Vollkommenheit gelan„gen kann, welcher in ihrem Zwecke liegt; ja daß es „so in derselben immer unentschieden bleiben müßte, wie „weit sich ihre Vollständigkeit erstreckt, ob nicht noch „ganz neue Materien und ganze Abtheilungen in ihr ent„deckt, — — — und wie weit ihre Gränzen noch er„weitert werden können; daß würklich in der Theorie „der höhern Gleichungen [in der Differenzial„und IntegralRechnung.]" (Das lückenhafteste Ding von der Welt das anzutreffen ist. Wenn in dieser RechnungsMethode nicht eitel Zufall waltete, so mußte man meine in der 2ten Abtheilung d. Schrift gegebenen Rektifikationen und Quadraturen, welche nimmer endlich seün können und ewig in einer unendlichen Annäherung bestehen, der Parabel, Ellipse und Hüperbel eben so finden auf dem Wege der allbekannten Analüsis des Unendlichen, — sowol dem Archimede als den neuen Geometern ward eine endliche Quadratur der Parabel und elliptischen Sektoren; o über die Selbsttäuschungen! Wir begreifen nicht wie? finden nicht worin die höhern Theile der theoretischen Mathematik schon zu einem freiern und geistvollern Vortrage erhoben wären, wärend die Elemente noch in den alten Fesseln liegen.) "in den trigonometrischen Funktio„nen, in der KegelSchnittesLere, in der höhern Me„chanik noch manche Lücken enthalten sind, noch eine Men„ge

„ge Sätze vorkommen, von denen man, so zu sagen, glau„ben sollte, sie wären als Warheiten vom Himmel gefal„len! welche als Warheiten dastehen, allein keinen not„wendigen Zusammenhang, keinen überzeugenden Beweis„Grund aus dem Vorhergehenden, auf eine verbindende „Art, erkennen lassen; — daß es aber der Karakter der „(formalen) Wissenschaft fordere; daß man bei ihrer Er„zeugung, von einem und demselben Prinzip *), von „der Erklärung der Größe, ausgehen, und nicht darauf „sehen darf, was von ihr vorhanden ist, und in ein Sü„stem gezwungen werden kann; sondern schlechterdings nur „darauf sehen muß: was in derselben aus genann„tem Prinzip, durch das Süstem notwendig „zu Stande gebracht werden, und im Süsteme, an sei„nem notwendigen Ort, hervorkommen muß; — daß die „einzelnen Materien und Abtheilungen der reinen Mathe„matik, nur in dieser Weise einen notwendigen Zusam„menhang, eine notwendige FolgenVerknüpfung; daß „diese Wissenschaft nur in dieser Weise vollständig ihrer „Materien und Theile nach, in ihrer Natur dargestellt „und (da nur diese Darstellung mit den Gesetzen des Den„kens (des ErkenntnißVermögens), aus dem sie a priori „erzeugt wird, übereinstimmt), dieselbe auch nur in die„ser Weise am leichtesten erlernt werden kann — und durch „ihr Studium auch den reichsten Vortheil zur regelmäßi„gen Ausbildung des Verstandes, der Vernunft und der „UrtelsKraft des Menschen, in allen andern Wissenschaften, „Künste und Geschäften des menschlichen Lebens an Han„den giebt: und sie endlich so auf der einen Seite zu dem „Grade der Vollkommenheit gebracht werden, und auf der „an„

*) Ueber das Prinzip der (reinen) Mathematik kann man auch im Schelling nachlesen. — Die Größe ist es nur von einem Theile. —

„andern den Theil des Besten des MenschenGeschlechts „gründen kann, der in ihrem Zwecke liegt: — dies alles, „wird mir nun ein jeder zugestehen, der den itzigen Grad „der Kultur der Mathematik z. B. aus Abrah. Gotth. „Kästner's Geschichte der Mathematik 4 Bände „kennt, und in voranstehenden Sätzen und Begriffen mit „mir einig ist. Damit wäre dann auch der Beweis, daß „in der reinen Mathematik eigentlich noch das Wich„tigste und Interessanteste neu gesagt werden kann, „und um diese Wissenschaft in ihrer unverfälschten „Natur und der ihr eigenthümlichen Würde dar„zustellen, gesagt werden muß, dargethan: und der rich„tige GesichtsPunkt angegeben, aus welchem hinfüro eine „reine GrößenWissenschaft notwendig betrachtet wer„den muß.

„Da übrigens hierbei nur die Wissenschaft, inwiefern „sie aus der allgemeinen WarheitsQuelle fließt, geschöpft „wird, und in ihrer Würkung das Beste des Menschen„Geschlechts gründet, das Augenmerk seün soll: und „daher meine reine Mathematik kein anderes Verdienst ha„ben soll, als was in ihr selbst liegt, was Kenner in ihr „selbst erkennen werden: so werde ich hoffentlich nicht be„fürchten dürfen, daß man in mein obiges Urtel über an„dere mathematische Werke dieser Art und über meine die „Absicht lege: als wollte ich durch die Schmälerung der „Verdienste meiner Vorgänger, mein eigenes erhöhen; „nein! so was kömmt nur einem Manne zu, welcher eine „edlere Glückseeligkeit in sich, durch das Bewußtseün, et„was zur Vervollkommnung der Wissenschaft beigetragen „zu haben, unter einer niedrigen Gesinnung zu vernach„lässigen fähig ist! Gewiß weiß ich die Verdienste meiner „Vorgänger zu schätzen: denen ich meine erste Bildung „danke!" So weit Schönberger.

Doch

Doch ich kann ja nicht ein mal von dem angefangenen Unternemen, Mathematik zu reformiren, abstehen, da ich öffentlich dazu aufgefordert worden bin in den Neuen Würzburger gelerten Anzeigen von 1801 vom 26. Aug. in der Anzeige meiner reinwissenschaftlichen Deduktion oder Ableitung der waren Verhältnisse u. s. w. Sie kam mir ein ganzes Jar später zu Gesicht:

"Der Verf. hat im Sinne, auch mathematische Reformen vorzunemen. Jede Wissenschaft gehet von Prinzipien aus, die evident, ausgemacht und zweifellos sind. Insofern die Mathematik von Sätzen ausgehet, die von keinem gesunden Verstande bezweifelt werden können, setzt sie dieselben als sonst erwießen voraus. Muß dieser (der gesunde Verstand) vor der Philosophie Achtung haben, die in der Mathematik waltet, so ist es schnöde, ungerechte Arroganz derselben (d. Math.) im stolzen Wane, das philosophische Wissen werde nie dem mathematischen gleich werden und auf demonstrativ unwidersprechliche Allgemeingültigkeit Anspruch machen können. Wenn die Grundleren derselben nur Voraussetzungen — was sind Aksiomen anders, die in der Mathematik nicht erwießen zu werden brauchen, aber doch sonst erwießen seün müssen? — sind, wie der Mathematiker zugeben muß, der nicht läugnen kann, daß auch sein Wissen als in der Region des Wissens überhaupt gegründet und ursprünglich enthalten ansehen muß; wird man durch MachtSprüche, dem die gesunde Vernunft absprechen, der mit der Evidenz und Eigenthümlichkeit der Prinzipien der Mathematik nicht verstanden ist, insoferne sie wänet, sie nur sich verdanken zu dürfen? — das wird den Mathematikern, die so gerne die Philosophie ignoriren, auffallen: Aber Wer-

nes

neburg lasse sich nur nicht abschrecken, seine mathematische Reformen philosophisch fortzusetzen. — Worin sie noch zur Zeit bestehen, lert der Titel. Was wir noch zu erwarten haben, erfärt man aus mererm gelegentlichen Aeußerungen."

Hiemit kontrastiren freilich die Bemühungen anderer Rez., besonders im Leipziger JarBuche für die neueste Litteratur N°. 313. S. 469-470. Suppl. B. 1801., die die von mir in der erwänten Schrift aufgestellte Theorie der Verhältnisse trigonometrischer Linien und die abgeleiteten Formeln als allgemein, als war, als alleingültig und als meine Erfindung in Zweifel zu ziehen: Und in der Erl. Lit. Zeitung N°. 28. 1802, welche nur Zweifel gegen die Erfüllung der Erfordernisse einer streng wissenschaftlichen Deduktion erregen und aufwerfen wollte. — Diese Blätter und vielleicht auch andere, denn wer ließt die übrigen kritisirenden Zeitungen alle, namen kein Beispiel an der Abfertigung, die die alte allg. Jenaische Zeitung in meiner Antikritik in d. Erl. Lit. 1801. erhalten hatte, worauf diese nur zu schweigen wußte und schweigen konnte. —

Nun so mag dann das schwere Amt, bei doch so bittersüßer Kost, der philosophischen Forsetzung mathematischer Reformen weiter von mir durch diese Schrift ausgeübt oder eingeleitet werden, wenn mir nur der Beifall einiger wenigen Menschen gewiß zum Lone bleibt.

Es seü mir vergönnt, einige Stellen aus Briefen eines Freundes, welcher Lerer der Mathematik in Franken ist und dem ich die Entwürfe dieser Schrift mittheilte, am Ende dieser Schrift mit abdrucken zu lassen. —

Im Sept. 1803.

Der Verfasser.

An=

Anmerk. b. Abdruck. Wie man in Rez. meiner ersten allg. RechnenLere mir vorrücken kann, daß ich in den Beweißen für die Ekstraktionen, Kästner's und Vega's Beweiß in der Dekadik hätte zur Norm nemen sollen, da ich doch diese laut der Vorrede aus solchen Schriften voraussetzte, und wie man diesen Artikel deshalb so unvollständig bearbeitet finden kann, ist unbegreiflich — auch wie man nach der von mir gelerten Methode noch die höhern Einheiten bei Flächen- und KörperMassen in die niedern Einheiten zu verwandlen bedürftig seü oder □′ □″ □‴ zu bezeichnen nötig habe, wenn man die kleinste Einheit bezeichnet und benamt hat. Es zeigt von Kurzsichtigkeit, wenn es Math. scheint — "daß man wenig an Richtigkeit des Resultats bei meinem Verfaren gewinne." — Weiß man denn noch immer nicht den Schein vom Waren bei allem anmaßlichen Vertrautthun mit der Sache zu sondern, daß man sagen kann: "dieses Werk wird daher in praktischer Hinsicht aber wol eben so wenig, als die frühern Vorschläge des Verfassers, das TaunZalenSüstem einzufüren, benutzt werde; insbesondere wenn man einst der Wolthat einer größern Gleichförmigkeit und der mit der Dekadik so eng vereinten zentheiligen (?!) Eintheilung aller Masse mer Aufmerksamkeit widmet." Dies Urtel zeigt, wie wenig man Praksis mit den (zwölf- und zentheiligen) Eintheilungen hat und die Wolthat der mit der Taunadik verbundenen stetigen zwölftheiligen Eintheilung nach den SüstemBrüchen erforscht und eingesehen hat über die leidige mit in den Organismus miteingewachsenen Zenteltheilung. — Es schmerzt ser, wenn man andere M. so zurück siehet. —

Grund:

Grundzüge

von

originellen alten und neuesten Theilen

der

Geometrie

oder

Raum- und Bewegungslere.

Erste Abtheilung des Ganzen.

Grundzüge
von
alten und ganz neuen Theilen
der
Geometrie
oder
Raum- und Bewegungslere.

1. Wie kömmt der Mensch dazu, Dinge zu konstruiren zu wissenschaffen für sein Wissenschaffen? (Die Frage: nach dem Wesenschaffen, oder Schaffen der Dinge kümmert dem Mathematiker nicht.) Setzt er nicht jedes Ding als Einzelnes und sie alle als Raumerfüllendes, umgeben vom absoluten Gegensatze, dem absoluten Raume? und wie setzt er merere Dinge, Einzelnheiten? theilt, analüsirt er nicht das Totum, die Totalität, AllEinheit, Einheit in Einzelne Theile, in Einzelnheiten, die sich zum Ganzen im Ganzen ergänzen, als Absolut in einem Eins, ganz eins seünd? — Und dieses Eins, diese Einheit, wird, ist, verwird ihm nicht anders, als indem der Mensch sie analüsirt in Einzelne, Einzelnheiten und eben so notwendig sie zugleich sünthetisirt zum absoluten Eins. Es kann dies aber nicht geschehen, dieses Setzen und Finden, dieses Finden und Setzen (der Einzelnheiten im Eins) als nur neben und nach einander und nach und neben einander, als durch dies Wissenschaffen in Raum und Zeit, als endliches einzelnes Räumliches und Zeitliches; jedes Räumliche umgeben vom unendlichen Raume d. h. Urraume, und jedes Zeitliche als inner der unendlichen Zeit = Ewigkeit,

Ur-

UrZeit. Ein Rec. der J. L. Z. der Pestalozzi'schen Schrift sagt: die Aussenwelt muß sich dem Menschen zuerst als eine Summe von Einzelnheiten darstellen, ehe er überhaupt Vorstellungen empfangen kann.

Das Kind richtet seine Aufmerksamkeit von einem Gegenstande auf den andern. Die Eindrücke von beiden können nicht in ein und dasselbe Moment zusammenfallen, und folglich sich auch nicht einander ganz gleich seün. Der Unterschied der Zeit sondert zwar nicht die Gegenstände von einander ab, wol aber die Eindrücke, und die dadurch sich bildenden Vorstellungen. Die innere Bedingung der Vorstellung ist diesem nach die Zeit: so wie die Warnembarkeit äusserer Gegenstände den Raum voraussetzt. Beide, Raum und Zeit sind aber unendlich und als solche nicht Gegenstände unserer Warnemung, (?) sondern sie fallen nur inner gewissen Gränzen in unserem WarnemungsKreis. Beide werden dadurch relativ: der Raum als Größe; die Zeit als Einheit oder Vielheit. Es giebt also keine Größe one Umgränzung des Raums, keine Vielheit one ZeitAbschnitte. Eine jede Umgränzung des Raums muß aber eine gewisse Form (eine Gestalt) haben. Die Form ist die Bedingung der Anschauung, oder der Warnemung von Gegenständen. Alle Gegenstände, welche der Mensch aufnimmt, müssen sich an eine Form anschließen *) und Pestalozzi fodert mit Recht, sie als den AnfangsPunkt der menschlichen Bildung anzusehen.

Ihr untergeordnet ist die Zal; denn sie ist die Bedingung der Vorstellungen selbst, die sich nur als Einheiten in ein bestimmtes Verhältnis bringen lassen. In allen unsern Erkenntnissen muß es etwas Aeusseres und etwas Inneres geben. Daher bestehen beide Form und Zal, als ElementarPunkte der Bildung neben einander. Die Zal ist ihrem Wesen nach nichts anders, als, der Organismus unseres DenkVermögens, nach welchem die Vorstellungen nur nach einander seün können. Sollen nun merere gesonderte Vorstellungen in mir zugleich vorhanden seün, so müssen sie zuvörderst zu einer Einheit verbunden werden, aus dem eben genannten Grunde. Darin besteht

*) Die Lere von der Konstruktion der Formen und ihrer Qualitäten one alle Quantität ist Geometrie oder RaumLere; wird aber auf die Quantität gesehen, werden die Größen bestimmt, so entsteht berechnende RaumLere.

besteht aber unser ganzes Denken; denn dieses ist ein selbstthätiges Zusammenfassen des Gesonderten zu einer Einheit. Um das letztere zu vollbringen, wurde jene Sonderung notwendig. Die Zahl ist die konkrete Darstellung des Denkers, und daher ist sie allein untrüglich, und unwidersprechliche Warheit, (die Konstruktion der Formen und Qualitäten desgleichen; die Zal begründet die arithmetische, die Form die geometrische Warheit.) Wir müssen uns selbst verläugnen, wir müßten aus uns selbst herausgehen, wenn nur ein einziger Zweifel an ihrer Realität in uns entstehen könnte. Zälen und Formen, und Denken ist nur spezifisch verschieden. — —

2. Jedes Ding (Ich und sein Du), und sein absolutes zur AllEinheit des Eins Ergänzendes müssen etwas beiden gemeinsames und doch beide streng und scharf beschränkendes, Begränzendes haben, sie müssen eine beiden gemeine Gränze haben, inner und ausser und durch welche beide erst erkennbar sind, und das sind was sie sind, nämlich: sich wechselseitig begränzende im Raume und in der Zeit. Da aber die Gränze, nicht das Ding oder der Körper selbst seün kann: oder da das Ding sich nicht selbst Gränze seün kann, inwiefern es eben Räumliches, oder Körper ist, so muß der Gränze des Dinges oder des Körpers etwas von dem mangeln, was zur Wesenheit des Dinges als eines in und durch sich beschlossenen Ganzen gehört, oder was Attribute desselben sind.

3. Nun ist aber im abstrakten Sinn des endlichen Raumes = Körpers Merkmal, Karakteristik, Eigenheit, ganze Wesenheit nur die, daß er etwas Stetiges, Ausgedentes (von irgend einem Orte inner demselben nach allen Richtungen), nach allen drei Dimensionen stetig ausgedent (ausfüllend, solid) ist. Der Gränze des Körpers (d. h. dem gemeinsamen Bunde, der sich wechselseitig erklärenden und begründenden Antithesen, endlicher und unendlicher Raum) muß also notwendig das Stetige, das Ausgedente, das Solide nach einer der drei Richtungen, Dimensionen abgehen; sie muß ein Solides nur nach zwei Dimensionen seün und diese absolutnotwendige Gränze nennt man Fläche. Sie, die Fläche ist eben so absolut im Bewußtseün des Menschen wie der Körper. Wiefern man den Raum nach den drei Dimensionen KörperRaum nennt, wird das Stetige nach blos zwei Dimensionen FlächenRaum genannt.

4. Die

4. Die Fläche windet sich entweder nie, sie behält einerlei kürzeste Richtung (Direktion), so daß alles sich deckt und man hat die gerade Fläche, was dann auch Ebene genannt wird: oder die Fläche windet sich und man hat die krumme Fläche auch Krümme genannt. Diese krumme Fläche windet sich nun entweder regulär oder irregulär, d. h. ersteres nach einem (stetigen) Gesetze, stetig in jedem Momente, das zweite willkürlich in jeglichem Momente sich ändernd.

Ein dritter Fall ist, wenn die Fläche des Körpers eine gebrochene ist; diese kann entweder aus lauter Ebenen, oder aus lauter Krümmen, oder aus beiden zugleich bestehen; ja die Krümmen können von der Beschaffenheit seün, daß kein Brechen, sondern ein in sich selbst überflüßendes zurückfließendes Winden statt findet. Dann haben wir Sphären und der Körper ist ein Sphäroid. Diese sphäroidischen Körper können aber an irgend einer Stelle in zwei ungleiche oder gleiche Hälften getheilt gedacht werden, und dann findet auch ein Brechen der Krümmen d. h. der Gränze des Körpers statt.

5. Folglich muß selbst die Gränze des Körpers d. h. der FlächenRaum seine Gränze haben. Dieser Gränze der Gränze des körperlichen Raums nun muß eben, wiefern sie dies ist, zwar auch ein solides Etwas, jedoch mit noch einem Mangel mer seün; ihm muß die Eigenschaft, ein Solides nach zwei Dimensionen zu seün, abgehen; Als Gränze der Fläche muß diese Gränze ein solider Raum von blos Einer Dimension seün.

Dieser solide Raum nach blos Einer Dimension wird genannt und ist die Linie; sie ist etwas absolut Körper- und selbst auch FlächenLoßes.

6. Entweder ist nun in allem und jedem Momente oder Atome die Richtung dieselbe stetig kürzeste oder sie ist eben in jeglichem Atome eine andere eine veränderte und zwar, entweder eine sich regellos (unstetig) verändernde, oder eine stets sich stetig verändernde, d. h. sich stetig krümmende Richtung. Im ersten Fall ist sie gerade Linie und im 2ten ist sie eine krumme Linie, welche, inwiefern sie sich stetig in jedem Atome krümmt, eine Kurve genannt wird.

7. Nur Kurven können Gegenstand der Mathematik seün, wiefern etwas Gesetzmäßiges in ihnen waltet. Sie sind entweder in sich selbst stetig zurückkreißende, ihr

Name

Name ist dann Kreiße, oder sich aufkreißende, aufkrümmende ins Unendliche hinaus, Hüperbel oder Parabeln genannt werdend; oder sich selbst durchkreißende, KnotenKurven (Epizükloiden und Hüpozükloiden; oder sie sind auch stets auf- oder zukrümmend, sich selbst umkreißende Kurven, SpiralLinien genannt. Kurven, die sich stetig von etwas ab- oder zu etwas zuzuwinden oder zukrümmen, können MuschelLinien und andere Zükloiden u. s. w. seün.

[Die gerade Linie ist der kürzeste Weg eines zweiten Etwas vom ersten zum dritten. Kurve ist die stetig in jedem Atome gekrümmte Bewegung eines 2ten vom 1ten zum 3ten]

8. Aber auch selbst jede Linie muß als ein Ausgedentes, als ein solider Raum wiederum seine Gränzen haben und dieser Gränze muß eben, wiefern sie dieses ist, auch etwas mangeln, was selbst die Gränze des FlächenRaums besitzt, und das darin besteht, daß sie eben ein nach nur einer Dimension Räumliches ist. Mithin muß diese Eigenschaft der Gränze des LinienRaumes abgehen. Es darf nämlich ein nach gar keiner, der drei möglichen Dimensionen Ausgedentes, Räumliches seün, es muß Raumlos ganz und gar seün. Es ist das Abstrakteße von der Welt nur für den höchsten Denker vorhanden. Man nennt diese Gränze alles Räumlichen den (mathematischen) Punkt. Unzälige Punkte oder das Unendliche selbst sind also die Gränze der Linie.

9. Doch wird dem Menschen keiner der abstrakten Begriffe KörperRaum, FlächenRaum, LinienRaum und Punkt früher als die 3 übrigen, sie werden und sind ihm mit einem Male zugleich oder gleichzeitig; nur in der Wissenschaffung werden sie ihm so nach einander wie wir sie aufzeichneten. Keineswegs in der umgekerten Ordnung: Etwa aus Aneinanderreihung von Punkten die Linie, aus Aneinanderreihung oder Fortbewegung der Linien die Flächen, und endlich aus Aneinanderreihung oder Fortbewegung der FlächenRäume die KörperRäume?! — *) Die Wissenschaffung dieser Begriffe kann nicht die entgegengesetzte von der oben aufgezeichneten seün; weil aus dem Punkte, dem reellen Nichtse nie etwas entstehen kann. Zwei Ar-

*) Siehe Langsdorfs Geometrie.

gerade Linien sind entweder in einer Ebene oder nicht, dann liegen sie in einer Krümme. —

(10.) ε. Je zwei gerade Linien in einer Ebene können entweder auf einer der beiden Seiten zusammenlaufend, sich nähernd seün oder sie sind und werden es niemals. Im ersten Fall sind sie kon= und divergirende Linien und bilden an der Konvergenz oder Durchkreuzung eine Spitze, der geradlinigte Winkel genannt: im zweiten Fall heißen sie (geradlinigte) ParallelLinien, ewig und stets gleichlaufende, auf keiner Seite ewig sich niemals durchschneidende Linien, die nie einen Winkel bilden. Wenn und wiefern eben zwei gerade Linien auf irgend einer Seite einander näher als auf der andern Seite liegen; sofern sind sie auf einer der einen konvergirend und müssen sich nach gehöriger Verlängerung auf der konvergirenden Seite einmal durchschneiden.

(11.) ϱ. Wiefern und wenn zwei gerade Linien in einer Ebene keineswegs weder auf der einen, noch auf der andern Seite sich einander nähern; sofern und so durchschneiden sie sich auch nicht und sind daher parallel d. h. stets und immer gleich weit von einander entfernt; und umgekert wiefern Linien parallel sind, sofern nähern sie sich einander nie.

Und daher müssen auch alle Beweiße und Erweiße für die ParallelLinien hinken und nicht genügen, weil ja sie ein für sich und aus sich selbst erklärlicher GrundSatz sind, und eben alles das begründen, worauf man sie zu gründen sich bemühete. Ihr Beweiß und sie selbst ergeben sich one weiteres aus der Definition einer WechselNäherung oder Unterlaßung derselben; ihnen kommt gerade als Eigenschaft dasjenige zu, was reine Negation von dem ist, was den konvergirenden Linien zukömmt und umgekert. Daß ich mich eines Gleichnißes bedienen dürfe: man wollte hier in der Mathematik dasjenige durch das alles beweißen, was eben als zuerst Festes, Gründliches diesem allen Festigkeit und Erweisbarkeit erst ertheilen kann; wie man in der Philosophie das Seün und Daseün Gottes aus dem beweißen wollte, dem erst Gewisheit und Erweisbarkeit durch die absolute Festigkeit oder Absolutheit Gottes ertheilt wird.

(12.) ιο. Man kann auch die Oefnung eines geraden Winkel sich so deriviren oder wissenschaffen, daß eine zweite gerade Linie von einer ersten sich so ablöße, daß beide

der=

dergestalt einen gemeinsamen Punkt behalten und diese zweite sich stets um ebendenselben Punkt abbewege, oder vielmer abbewegt habe *).

(13.) 11. Wiefern denn ein geradlinigter Winkel die Fläche nach einer Seite ins Unendliche offen läßt; sofern kann nur eine dritte Linie, welche die beiden andern durchschneidet mit jenem Winkel d. h. erst drei und nicht weniger gerade Linien können einen blos von geraden Linien begränzten FlächenRaum einschließen, was man Dreieck oder besser Dreiwinkel (Dreiseiter) nennen sollte. Zwei Triagonen, so nennt man auch diese △, bilden bei einerlei gemeinsamen Basis das Tetragon und so merere aneinandergereihete Triagone die verschiedenen Polúgone, oder vielmer ist jedes Polúgon in lauter Triagone zu zerlegen, d. h. jeder durch m gerade Linien geschlossener FlächenRaum ist in (m — 2) Triagone oder △ zu zerlegen. Die Summe aller der geraden Linien, die ein Polúgon einschließen, heißt der Umfang auch Perimeter des jedesmaligen Polúgons.

(14.) 12. Dieser Perimeter oder die Summe der GränzLinien des (geradlinigten) Polúgons kann immer einerlei, identisch bleiben, weder größer noch kleiner werden, wie sich auch (jede der Linien) die Linien unter einander ändern mögen. — Der Ergänzungen der Linien unter einander bei demselben Polúgone zu Ein und eben derselben Summe, zu denselben Perimeter sind unendlich viele. —

(15.) 13. Es kann sich gleichsam irgend einer der äußersten (Spitz)Punkte desselben Polúgons unter unveränderlich bleibendem Perimeter d. h. bei stets identischer Summe der Seiten, um die übrigen herumkreißend bewegen und so durch seinen Weg in der äußersten Anspannung einen in sich selbst zurückkerenden, sich selbst beschließenden Kreis, von eigener Art beschreiben, der notwendiger Weise durch

*) Wenn eine solche sich ablößende gerade Linie an ihrem EndPunkte sich stetig verlängert oder sich stetig verkürzt, wie die Ablößung oder Abkreißung stetig zunimmt, so beschreibt dieser EndPunkt aufkreißende oder zukreißende Kurven, deren Verschiedenheiten durch die WechselVerhältnisse bedingt werden, in denen die Größe des OefnungsWinkels und die Zuname oder Abname der beschreibenden Linie zu einander stehen.

durch die n weniger einen festen, d. h. unter sich gleich weit entfernt bleibenden, EndPunkte des ngons und den unveränderlichen Perimeter bedingt oder bestimmt seün muß und ist, sie heißen PunktKreiße. —

(16.) 14. Hier riß sich gleichsam nur ein fester Punkt los und kreißete bei gleichbleibendem gespannten Perimeter oder bei gleicher Beschränkung um die übrigen. Umgekert können sich jetzt die zeither unbeweglichen EndPunkte eines Polügons in Bewegung setzen, so daß sie den zeither beweglichen Punkt zum unbeweglichen verdammen und nun um diesen herum kreißen; doch müssen sie so kreißen, daß sämmtliche bewegliche Punkte unter sich stets gleich weit entfernt bleiben und so jeder EndPunkt seinen eigenen Kreis beschreibt.

(17.) 15. Jeder dieser Kreiße würde ein völliger Zirkel seün, wenn alle Theile des n — 1 gons (Polügons von n — 1 Seiten) beständig einerlei Lage und Entfernung gegen den festen Punkt behielten. Wärend und wenn sich daher ein Polügon von n oder m Seiten und Winkeln um einen festen Punkt kreißt, so ist Bedingung, selbst Erfordernis, daß es ein, zwei, oder merere mal d. h. allgemein α mal um seinen Zentral- oder SchwerPunkt oder um sich selbst kreißet, drehet, d. h. mit Stetigkeit kreißet und drehet. Dann beschreibet jeder dieser Punkte KnotenKreiße, die unter sich ähnlich sind.

Sie werden bedingt oder bestimmt durch die Punkte des, um sich selbst α mal, und um den festen Punkt ein mal herumkreißende Polügons von n oder m Punkten und Seiten und des an sich stets gleichbleibenden nur in seinen sich ergänzenden Theilen stets veränderlichen äussern Perimeters der beweglichen und des festen Punktes unter einander. —

Oder man kann sich auch die Konstruktion dieser und anderer KnotenKreiße so vorstellen, daß inner einem in einem oder mehrern festen Punkte, mit einem Worte, an einem m gone ein in sich selbst zurückkerender, von bestimmter Ausdenung oder Länge, hangender Faden ein Polügon von n Seiten oder von n unter sich gleichweit entfernt bleibenden EndPunkten kreißet oder dreht, während es 1 oder α mal um sich selbst (d. h. um seinen eigenen Schwer-Punkt kreißet und so jeder seiner Punkte die Spur seines Weges stetig zurückläßt. — Doch ich werde sogleich weiter

ter die Geschlechter und Arten aller dieser einfachen und Knoten-Kreiße karakterisiren und detailirt aufzälen.

(18.) 16. Anmerk. Der Denker trachtet vor allen Dingen in jener Raum- und BewegungsLere rein aufzufassen den einzig richtigen Begriff des Bewegens und hieraus die möglichen Fälle von Bewegungen zu entwickeln. Hier entquellen dann die reinen und richtigen Begriffe von der geraden und von den krummen Linien; vom Winkel; von geraden und krummen Flächen, eingeschlossen von geraden oder (und) krummen Linien; von ebenen Oertern, von Ecken, gebildet notwendig von wenigstens 3 in einem Punkte zusammenstoßenden Flächen; und von Körpern: einmal alles, wenn das Bewegen stetig in jeder ZeitEinheit das gleiche ist, zur RaumLere; wenn es ein beschleunigend wachsendes oder abnemendes ist, also mit dem Begriffe von Geschwindigkeit versehen, zur BewegungsLere gehörig. — Unter andern sind (in jener RaumLere) diese Bewegungen hier und ihre Qualitäten zu entwickeln: Die Bewegung Eines bewegbaren Punktes um einen festen Punkt, dann die um zwei, um drei, vier, fünf, sechs, sieben, achr, neun, zehn, mör (ölf) oder um (zwölf) taun feste oder stete Punkte u. s. w. bei unveränderlich gleich bleibender Summe der Entfernungen des bewegten Punktes von und zu den steten Punkten und dieser unter sich. Da jede dieser Bewegungen in sich selbst zurückläuft, so entstehen daraus eben so viele Arten von in sich selbst beschlossenen Kurven oder von so vielen Kreißen, welche regulär oder irregulär sind, jenachdem entweder jezwei und jezwei NachbarPunkte gleichweite Entfernungen von einander haben, oder in diesen Entfernungen von einander abweichen und darin ungleich sind. —

2. Anm. Soll sich, wie man annimmt, die Erde, wie jeder Planet (um die Sonne) in einer Ellipse (ZweipunktKreis) bewegen; so müßte die Sonne mit noch einer andern Sonne, welche beide unbeweglich wären, die Ban des Planeten bestimmen, wie dies die Natur der Ellipse verlangt. — Schon deswegen kann die Ban der Planeten um die Sonne keine Ellipse oder keine elliptische seün.

(19.) 17. Diese Kreiße wären dann nach ihren zu gebenden Benennungen der EinpunktKreis, [unser bekannter Zirkel]; der ZweipunktKreis [die bekannte Ellipse, uneigentlich zeither als doch eine Fläche und Linie, von einem Körper dem Kegel, als KegelSchnitt, gleich der Parabel und Hüperbel abgeleitet und dargestellt] auch LinienKreis zu heißen; der DreipunktKreis oder DreiwinkelKreis *) [gerade Das in dieser Kreis-Lere

*) Da der Begriff von Ecke nicht der Flächen- sondern der KörperLere angehört und jener ganz fremd ist, so ist der

Lere und für die nachfolgenden Kreiße, was der Triangel in der Lere der sogenannten Vielecke und für diese ist]; der Vierpunkt- oder VierwinkelKreis; der Fünfpunkt- oder FünfwinkelKreis; der Sechspunkt- oder SechswinkelKreis und so weiter nach der Zal der steten Punkte die übrigen Kreiße.

(20.) 18. Das Gegentheil von diesen Bewegungen wäre die Bewegung eines Punktes oder zweier beweglichen Punkte, oder von drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn, mör oder taun beweglichen Punkten u. s. w. oder eines 3ons, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ε, ϱ, oder 10gons u. s. w. um einen festen oder steten Punkt, bei unverrückt gleicher Summe der Entfernungen der beweglichen Punkte mit dem festen, wo die Entfernung der beweglichen Punkte unter sich unveränderlich sind. Ein solches ngon kann sich αmal um sich selbst drehen oder kreißen, während es sich 1mal um den festen oder ZentralPunkt dreht. Jede auch von diesen Bewegungen muß in sich selbst rückläufig seün und einen Kreis bilden. Ueber ihre Regularität und Irregularität und Benennungen lasse ich mich hier weiter nicht aus, sie werden sich schon seiner Zeit finden in der Raum- und BewegungsLere. Sollte und könnte nicht Pallas und Ceres eine solche um sich selbst kreißende Linie seün, und sollten solche KnotenKreiße einer Linie um einen Punkt nicht ihre Bewegungen um die Sonne seün?

(21.) 19. Zwischen diesen erwänten beiden entgegengesetzten Arten von Bewegung mitten inne gleichsam liegen die folgenden Bewegungen, die bestimmt sind durch zwei bewegliche und zwei stete Punkte, zwei bewegliche und drei stete, drei bewegliche und 2 stete, 2 bewegliche und 4 stete, 3 bewegliche und 3 stete, 4 bewegliche und 2 stete; 2 bewegliche und 5 stete, 3 bewegliche und 4 stete, 4 bewegliche und 3 stete, 5 bewegliche und 2 stete; 2 bew. und 6 stete, 3 bew. und 5 stete, 4 bewegliche und 4 stete, 5 bew. und 3 stete, 6 bew. und 2 stete; 2 bew. und 7 stete, 3 bew. und 6 stete, 4 bew. und 5 stete, 5 bew. und 4 stete, 6 bew. und 3 stete, 7 bew. und 2 stete; 2 bew. und 8 stete, 3 bew. und 7 stete, 4 bew. und 6 stete, 5 bew. und 5 stete, 6 bew. und 4 stete, 7 bew. und 3 stete, 8 bew. und 2 stete;

der Begriff von Winkel nicht mit dem von Ecke zu verwechseln und ich sage daher Dreiwinkel statt Dreieck, Vierwinkel statt Viereck, u. dergl.

2 stete; 2 bew. und 9 stete, 3 bew. und 8 stete, 4 bew. und 7 stete, 5 bew. und 6 stete, 6 bew. und 5 stete, 7 bew. und 4 stete, 8 bew. und 3 stete, 9 bew. und 2 stete; 2 bewegliche und ε stete, 3 bew. und 9 stete, 4 bew. und 8 stete, 5 bew. und 7 stete, 6 bew. und 6 stete, 7 bew. und 5 stete, 8 bew. und 4 stete, 9 bew. und 3 stete, ε bew. und 2 stete Punkte u. s. w.

(22.) 1ε. Ueberhaupt also rücksichtlich die Bewegung eines Punktes, oder einer Linie, eines 3gons, 4gons, 5, 6, 7, 8, 9, 9, ε, ϱ, oder 10gons (10Seiters oder 10Winkels) u. s. w. eines ∞gons (∞Seiters oder eines Zirkels) entweder um einen Punkt, oder um einer Linie, oder um ein 3gon, 4gon, 5gon, 6, 7, 8, 9, ε, ϱ oder 10gon (d. i. 10Seiter oder 10Winkel) u. s. w. bis um ein ∞gon (oder einen Zirkel), welche Figuren alle stete oder feste und unbeweglich in der reinen Raumlere sind, dagegen in der reinen Bewegungslere selbst beweglichе und Kreiße beschreibende Dinge seün können: Oder die Bewegung eines ngons oder nSeiter um einen mgone oder mSeiter, dieses mgons oder mSeiters um ein lgon oder lSeiter, dieses lgons oder lSeiters um ein kgon oder einen kSeiter u. s. w. (Mich in ein weiteres Detail hier bei diesen einzulassen, würde zu nichts helfen, eher merschaden, die Kenntnis meiner Prinzipien von Bewegen und anderer Prämissen verlangen, die hier in dieser Piece zu geben, ganz zweckwidrig wäre und unnütze Ab= und Ausschweifungen zu nennen sind. —) Genug ist es, sie hier wenigstens angedeutet und auf sie das Sachkundige Publikum aufmerksam gemacht zu haben.

(23.) 1ϱ. Aus gleichen Ursachen kann ich auch die die diesen kreißenden PunktBewegungen gänzlich entgegengesetzten, negativkreißenden oder Hüperbolischen Punkt-Bewegungen, die von einem Scheidel beginnen und ins Unendliche fortgehen, und eben so viel jeglichem von jenen positiven Kreißen, entsprechende gleichsam negative Kreiße geben, hier nur berüren.

(24.) 20. Von diesem beschriebenen Bewegen eines oder mererer Punkte um einen oder merere Punkte oder von diesen Punktbewegungen wenden wir uns ab und zu dem stetigen Bewegen einer Linie an oder um oder inner einer andern Linie, von allem ZeitVerhältnisse abgesehen, welches ein Wälzen oder vielmer Abwickeln oder Anwickeln einer Linie an oder um oder in einer andern gleichartigen

gen oder ungleichartigen Linie ist. Man sieht dabei auf die Linie, die ein Punkt, am Ende oder innerhalb der beweglichen Linie befindlich, durch jene Bewegung beschreibt und man erhält ein Mannigfaltiges von Linien, die entweder in sich selbst zurückkreißend oder vom Scheidel- oder AnfangsPunkt ins Unendliche abkreißend oder fortlaufend sind, was gleichsam Kreiße und Linien in der zweiten Potenz sind, entstanden aus Einer beweglichen und Einer ruhenden Linie erster Potenz. Und so können sich Kreiße und Linien der ersten oder der zweiten Potenz an oder um oder inner Kreiße oder Linien von der zweiten Potenz bewegen und ein festgesetzter Punkt in der beweglichen Linie neue Kreiße oder Linien beschreiben, die dann Kreiße und Linien von der dritten u. s. w. Potenz sind. Und so geben dergleichen immer neue und neuere Verbindungen und Kombinationen Kreiße und Linien von immer höhern Potenzen, die so verschieden sind, so verschieden die bedingenden Umstände waren, die man in der Bedingung festsetzte. —

(25.) 21. Welches unabsehbare, welches unermeßliche Feld für den RaumLerer, daß er noch umzureißen, zu bebauen und tragbar zu machen hat, welche Erndte für ihn! — für den höhern NaturLerer, dieser Linien oder Bilder ihre Würklichkeit in der Natur aufzufinden, aufzusuchen! — —

Welches unabsehbare Feld, welche Unermeßlichkeit von Anwendung der UrrechnenLere oder in ihre letzten rechtmäßigen Gränzen erweiterten Algebra auf diese RaumLere um die verschiedenen GrößenVerhältnisse gleichartiger Dinge unter und aus einander in allgemeinen Formeln zu bestimmen! — Nur der LebensDauer und den Kräften mererer nicht eines einzelnen Menschen kann es gelingen, diese verschiedenen Zweige der Geometrie in allen ihren Theilen aus einander zu wickeln. —

(26.) 22. Wie groß muß nun dann jenes Feld für den RaumBewegungsLerer, für den praktischen Urrechnen-Lerer (Analüsten) werden, wenn die zeither stetige oder gleichförmige Bewegung zur mer oder weniger beschleunigt wachsenden oder abnemenden Bewegung wird, wenn also die verschiedene Größe der Zeit auf die Größe der Bewegung und folglich des beschriebenen Wegs einwürkt und jene bei Bestimmung von dieser mit berücksichtigt werden muß. Und alle diese möglichen Bewegungen sollten in der Natur, nicht statt finden, soll-

sollten im großen und weiten Urraume von so verschiedenen WeltKörpern nicht beschrieben werden und längst beschrieben worden seün? — — — — — Unmöglich — Denn der UrMenschschaft das beständig bildlich und in der Idee, was Natur ewig würklich schaft. Idealles ist nicht one Reales vorhanden.

(27.) 23. Nur eine von jenen LinearBewegungen und daher entstehenden Linien will ich in Etwas näher beschreiben, um durch ein Beispiel zu zeigen, wie viele Linien von der zweiten und von den höhern Potenzen möglich sind. Eine gerade Linie (oder auch krumme Linie), welche man sich nach Erfordernis an dem andern Ende nach und nach ins unendliche verlängert vorstellen kann, beginne vom ersten Ende an sich nach und nach um einen Kreis z. B. einen Zirkel oder eine Ellipse, herum steif und gerade gleichsam abwickelnd herumzuwälzen, so beschreibt ihr erster oder Anfangs Punkt, von einem Punkte in der Perepherie des Kreißes aus und an, eine sich immer mer uud mer abkreißend aufwickelnde Linie um diesen Kreis herum, was eine Art Spiralkinie ist, die, wenn jene gerade Linie ins Unendliche während jener abwickelnden Umwälzung sich verlängert, auch ins Unendliche abkreißend sich aufwickelt und deren Gestalt durch die Gestalt des zum Grunde liegenden Kreißes, als des Ein-, Zwei-, DreiPunktKreißes u. s. w. oder n Punkt- m Punkt- l Punkt- k Punkt- u. s. w. Kreißes genau bestimmt wird und nach dieser sich richtet.

(28.) 24. In jedem Momente oder überall da, wo die Bewegung abgebrochen wird, ist die Länge der beweglichen geraden Linie, vom Punkte an, wo sie gerade jetzt die Perepherie des Kreißes berürt, bis zu dem, die neuere Linie beschreibenden, EndPunkte ist gleich der null, oder der ein oder merere Mal und zum Theil eben abgewickelten Perepherie des Kreißes und also eine Tangente an der Perepherie des Kreißes, die von dieser bis zum jetzigen EndPunkte der eben beschriebenen Linie reicht. Diese Tangente wäre also algebraisch ausgedruckt das n fache der Perepherie des zum Grunde liegenden Kreißes oder = nP, wo n eine ganze oder gebrochene Zal und als diese einen eigentlichen oder uneigentlichen Bruch vorstellen kann. Die Entfernung des jedesmaligen EndPunktes jener neuen Linie vom MittelPunkte des Kreißes ist gleich einer Sekante, die sich leicht aus der Summe, aus der 2ten Potenz der

erwän-

erwänten Tangente und der 2ten Potenz von der Größe der Entfernung dieser Tangente vom MittelPunkte des Kreißes, als der Sekante zweiten Potenz, bestimmen läßt. Ist z. B. der Kreis ein Zirkel, so ist diese secante = $(r^2 + n^2 p^2)^{\frac{1}{2}}$

(29.) 25. Der, die neue Linie von der 2ten Potenz beschreibende, Punkt braucht nicht gerade jener erste EndPunkt der sich abkreißend wälzenden Linie zu seün, er kann ein anderer seitwärts von ihm abliegender Punkt seün, so daß die sie beide verbindende Linie einen Winkel mit der wälzenden Linie an jenem ersten EndPunkte machen. — — — — Wie sich die Kreiße in eben so vielartige Hüperbeln verwandlen und zu diesen verhalten und umgekert; so verwandlen sich SpiralLinien in eben so vielartige RadLinien und verhalten sich zu diesen und so umgekert. Doch genug von diesen Linien von höherer Potenz. — Wer von den Mathematikern einen schaffenden oder schöpferischen Geist hat, kann sich leicht viele der andern Fälle und Sorten von Linien selbst schaffend vorbilden — andern, denen er mangelt, möchten bei aller Beschreibung sich doch keine Bilder davon entwerfen können. —

(30.) 26. Daß unter diesen unendlich vielen, nach dem allgemeinen und reinen Begriff der Bewegung konstruirten oder gebildeten und bildbaren Linien nicht auch alle jene, den Mathematikern bereits bekannten, Linien der Alten und Neuern sich wieder einstellen sollten, wird und sollte hoffentlich keinen in Erstaunen setzen, sondern eher als notwendig vorkommen. —

Doch wir keren auf einige Augenblicke zur Bildung, Konstruktion der Winkel zurück.

(31.) 27. So wie sich zwei gerade Linien durchschneiden auf der Seite, wo sie sich einander nähern und niemals zusammen treffen, einander parallel sind, so bald sie sich selbst auf keiner Seite nähern, so können sich 2 gleichartige Kurven, oder KreisLinien entweder durchkreuzen, sich blos berüren, einander nähern one beides zu thun, oder einander parallel zu seün. Das Nähere hiervon kann nur in der Entwickelung jeder Gattung und Art vorkommen. —

Daß die gerade Linie, Kurven, oder Kreiße, oder Spiralen, oder RadLinien unter den mannigfaltigsten Richtungen ein oder merere Mal auch durchschneiden oder berüren

rüren, kann und muß, und daß daraus eigene Relationen und Qualitäten statt finden, eintreten; ist notwendige Folge der gekrümmten Linien und leuchtet daher von selbst ein. Je nachdem die Lage oder Richtung der geraden Linien zur stetig gekrümmten Linie ist, so entstehen bald Abschnitte, bald Ausschnitte, bald Trennung in zwei Theile der Kreiße, Kurven, Spiralen, RadLinien u. s. w. Dreht sich nun ein solcher Abschnitt oder Ausschnitt um die gerade Linie herum; so konstruiren sie die unzälig mannigfaltigen Körper, die man Sphären nennen mag. Ihre Mannigfaltigkeit ist nicht zu schätzen. —

(32.) 28. Wenn sich gerade Flächen d. h. Ebenen in einer geraden Linie unter irgend einem Winkel durchschneiden, entstehen die Lagen der sogenannten ebenen Oerter, oder wenn eine Ebene und eine krumme Fläche sich in einer geraden oder krummen Linie durchschneiden, die Lage der gemischten Oerter: sind die beiden sich durchschneidenden FlächenRäume stetig gekrümmte; so ist die Lage der gekrümmten Oerter da.

(33.) 29. Zeither war bei Durchschneidung zweier Ebenen in einer geraden Linie der KörperRaum nach zwei Seiten unendlich und offen, unbegränzt; jetzt durchschneidet eine dritte Ebene die beiden vorigen unter einer bestimmten Richtung, begränzt also der KörperRaum nach einer zweiten Dimension, alle drei Ebenen nähern sich auf einer Seite und auf der entgegengesetzten entfernen sie sich; hier lassen sie die Unendlichkeit offen; da auf der Seite, wo sich alle drei Ebenen einander nähern, treffen sie alle drei nach gehöriger Verlängerung derselben in nur einem und ebendemselben Punkt zusammen und hier bilden sie den KörperWinkel, d. h. die Ecke.

(34.) 2ε. Eben weil drei Ebenen, der Ecke entgegengesetzt, die Unendlichkeit offen lassen, kann nur eine vierte Ebene den ersten körperlichen endlichen Raum, der von geraden Flächen begränzt wird, bilden, konstruiren, weil sie mit jezwei der übrigen Flächen, noch drei Ecken und 3 LinienKanten bildet. Man nennt diesen KörperRaum eine dreiseitige Püramide zeither, obgleich vier Ebenen ihn erst begränzen; — auch Tetraeder.

Durch Zusammenfügung der SeitenFlächen zweier oder mererer Vierecke an gleichen Seiten entstehen die Fünfecke, Sechsecke, Siebenecke, Achtecke (Oktoeder) u. s. w.

(35.) 29. Säulen nennt man diejenigen KörperRäume, wo die Ausdenung nach einer der drei Dimensionen größer als jede der beiden übrigen ist. Die Anzal der geraden SeitenFlächen bestimmt den Namen der Säulen. Man sagt eine dreiseitige, vierseitige, oder *n*seitige Säule, wenn drei, vier oder n SeitenFlächen den KörperRaum in der längsten Dimension begränzen. Gewönlich pflegen zwei Ebenen zu beiden Seiten diese SeitenFlächen zu beiden Seiten zu durchschneiden und so den KörperRaum zu begränzen. Diese GränzEbenen erhalten dann die Gestalt des Polügons von eben so viel SeitenLinien als die Säule SeitenFlächen hat. Oefters laufen aber auch die SeitenFlächen der Säulen gebeugt entweder in einer Linie, Kante genannt, oder in einem Punkte, d. h. in einer Ecke zusammen; dann ist die Säule entweder zugeschärft oder zugespitzt. — Doch von allen diesen in der Lere der durch Ebenen begränzten KörperRäume kann das Nähere vorkommen. —

(36.) 30. Hat der Geometer seine stetig gekrümmten Linien, die einen endlichen oder unendlichen FlächenRaum begränzen und Kreiße, KnotenKreiße, Kurven, Parabeln, Hüperbeln, Spiralen oder RadLinien heißen mögen, konstruirt, d. h. gebildet, geschaffen; so werden ihm die Auffuchungen jeder Qualitäten irgend einer derselben nicht schwer fallen können, wenn er sich nur das Wie der Schöpfung jeder rein im Anschauen gegenwärtig erhält und nicht eher nach Quantitäten (der Quantitäten oder der Qualitäten) fragt, als bis er alle und jede Qualitäten und jenes Wie jeder krummen Linie rein erkennt. —

(37.) 31. Dann kann und wird es ihm nicht schwer fallen, die Art und Weise zu finden, einzusehen, wie jede stetig gekrümmte Linie qua linea vergleichbar, meßbar mit einer andern stetig gekrümmten Linie; oder mit irgend einer der ihr angehörigen (zugeordneten) geraden Linien inner oder ausser ihr, als Linie schlechthin (qua linea) meßbar, vergleichbar seün; d. h. mit einem Worte wie, wodurch, und auf was Art sie rektificirt, der eingeschlossene FlächenRaum quadrirt werden könne. —

(38.) 32. Da die festen Punkte inner einem n PunktKreiße und inner jeder stetig gekrümmten Linie oder die KardinalPunkte, welche die stete Krümmung jeder bedingen oder bestimmen, die hier fast alles Bedingenden sind und notwendig seün müssen; so kann auch nur an

und

und um sie und durch sie die Rektifikation jeglicher begründet, bedingt, und möglich seün.

Von diesen Kardinal-Punkten gleichsam aus sind Stralen (gerade Linien) oder Radien nach allen Richtungen nach dem Umkreiße, d. h. der Peripherie des jedesmaligen Kreißes oder der jedesmaligen Kurve und deren Theile hin zu ziehen. Man pflegt Theile der Kreiße oder der Kurven Kreiße- oder Kurven-Bögen zu nennen.

(39.) 33. Jezwei der festen die Krümmung des n-Punkt-Kreißes oder der Kurve bedingenden Punkte (d h. Kardinal-Punkte) sind leicht durch eine gerade Linie zu verbinden und diese zu beiden Seiten nach Belieben zu verlängern. Sie werden gewisse Haupt-Punkte an und inner der Peripherie jedes Kreißes oder jeder Kurve begründen, welche Scheitel-Punkte genannt zu werden pflegen. Sie sind gewönlich Anfangs-Punkte des Krümmens oder vielmer der Krümmung.

(40.) 34. Die von und nach diesen Scheitel- und den andern End-Punkten der Bögen von Punkt-Kreißen, Kurven und Spiralen nach und aus jenen Kardinal-Punkten, Foken derselben, gezogenen geraden Linien sind die notwendigen Radien, welche an Foken die Winkel-Oefnungen der Bögen bestimmen, sich durchkreuzen und welche absolut notwendig zur Erkenntnis der Qualitäten u. s. w. jeder stetig gekrümmten Linie sind.

(41.) 35. Von diesen Foken und von keinen andern der beliebigen Zentral-Punkten aus sind diese Radien nach allen Richtungen nach den Bögen der Gekrümmten hin zu ziehen, weil nur auf sie jegliche Kreiße, Kurven oder Spiralen während ihrem Krümmen in allen ihren Atomen sich beziehen, durch sie bedingt werden und nur gegen diese Foken Stetigkeit beobachten können; und umgekert diese Foken der Stralen oder Radien durch die Krümmung der Kreiße, Kurven oder Spiralen bedingt sind.

Gerade Linien, welche von dem einen End-Punkt der Bögen zu dem andern gezogen sind, heißen Senen. —

(42.) 36. Eine gerade Linie, welche parallele Senen unter einem und ebendemselben Neigungs-Winkel halbirend durchschneidet und auch durch das gemeinsame Mittel aller Bögen derselben hindurch gehet, heißt Aks-Linie. Ihr Durchschnitt durch dieses Mittel ist senkrecht und der Durchschnitts-Punkt pflegt eben Scheitel der Gekrümmten genannt

nannt zu werden. Ist die Zuname der Bögen zu beiden Enden bei parallelen Senen gleich gros, so durchschneidet die AksLinie alle diese Senen senkrecht. Spiralen haben in diesem Sinne keine AksLinien. —

Durch einen oder zwei solcher Foken der Radien gehet jegliche AksLinie.

(43.) 37. Gerade Linien von den EndPunkten aller Bögen der Gekrümmten auf die AksLinie gefällt, heißen senkrechte Ordinaten oder Sinuße der rücksichtlichen Bögen; die Entfernungen vom Scheitel bis zu diesen DurchschneidungsPunkten Abszißen oder Quersinuße der rücksichtlichen Bögen. (Ordinate und Absziße sind Radien des Bogens jeder Gekrümmten, die sich in Verbindung von unveränderlichen Größen wechselseitig in analütischen Funktionen bestimmen.)

Die eine von diesen beiden Linien kann entweder größer, oder kleiner als die andere oder ihr gleich seün.

(44.) 38. Die Gekrümmte rückt näher oder fernt sich mer der AksLinie wie die Absziße gegen die Ordinate immer größer oder kleiner wird und umgekert wie u. s. w. so. Die stetig gekrümmte Linie — sie seü Kreis, Kurve, Spirale —, bei ihrem gesetzmäßigen Krümmen nähert sich entweder mer und mer einem oder entfernt sich so von einem Punkte — gleichviel dem Zentrum oder dem Fokus, — oder (3tens) bleibt gleich weit von ihm entfernt und nahe. Im dritten Fall allein ist der All=EinpunktKreis, d. h. der gemeine Zirkel und das Gesetz der Krümmung ist mit und in jedem Momente dasselbe identische und hier sind die Radien alle einander gleich. Im 2ten und 3ten Falle ist es in und mit jedem Momente ein verhältnismäßig geändertes; ein stetig gemertes oder gemindertes Krümmen.

(45.) 39. Stralen oder Radien von einem Fokus aus werden an der Peripherie (der Gekrümmten) inner derselben entweder auf demselben Wege in denselben Punkt zurückgeworfen, oder gebrochen nach einem der andern Foken — positive oder negative — oder auch ins Unendliche hinaus geworfen. —

(46.) 3ε. Im ersten Falle findet kein Abstralungs= oder BrechungsWinkel der Stralen aus dem Fokus an und inner dem Ende jedes Bogens des Gekrümmten statt oder er ist = null. Im zweiten Falle ist er da und das vorzüglichste was in stetem Bezug auf den Bogen in qualitativer

und

und quantitativer Hinsicht berücksichtigt und nie außer der Acht gelassen werden muß und kann. —

Mittelst seiner Hälfte ist allein die Rektifikation des Bogens der Gekrümmten möglich, da, sie ist nach Erfordernis zur WinkelDefnung am Fokus entweder hinzuzufügen oder davon abzuziehen ist — wie sichs einst unten aus richtiger Ansicht der Sache ergiebt. —

(47.) 39. Jeder der beiden geraden Linien, welche jeden dieser AbstralungsWinkel an und inner den beiden Enden eines jeglichen Bogens der Gekrümmten in zwei gleiche Hälften theilen, steht auf dem EndPunkte dieses Bogens senkrecht, und beide bilden sonach verlängert einen Winkel und dieser mit dem Bogen selbst einen Ausschnitt; diese beiden sich durchschneidenden geraden Linien, welche senkrecht auf den zwei EndPunkten des Bogens aufstehen, sind die NormalRadien, welche zur Rektifikation des Bogens der Gekrümmten dienen. Der geometrische Mittelere aus beiden ist der erforderliche Radius, einen ZirkelBogen um ihren DurchschneidungsPunkt von gleicher WinkelDefnung zu beschreiben, welcher dem Bogen der Gekrümmten gleich ist.

(48.) 40. Diese StralenBrechungsWinkel stehen entweder im geraden Verhältnis der Zuname der Bögen, oder sie nemen ab, wie diese zunemen; dies ergiebt sich aus der Beschaffenheit der AusgangsPunkte und der Anschauung der Figuren selbst. —

In dem Falle, daß eine Gekrümmte einem festen Punkte sich mer und mer nähert, ist das Krümmen in ihr ein stetig abnemend Kleineres, da beginnt es vom Größten und schreitet fort bis zum Kleinsten, welches vom ihm im Endlichen oder erst im Unendlichen erreicht wird.

(49.) 41. Ersteres thun Kreiße, wenn sie sich von der größern zur kleinern Akse zukrümmen, von wo an das Krümmen ein zunemend Größeres wird bis zur Ankunft an der größern Akse.

Bei Kurven erreicht das Krümmen sein Kleinstes im Unendlichen, hier gehen die Radien vom Kleinsten bis zum unendlich Größten alle zwischen Verhältnisse durch, weil eine Kurve ins Unendlich hinausgeht. —

Weil Spiralen um sich selbst, erweiternd, kreißen, so hat jegliche in jedem Momente ein ewig unveränderliches

Gesetz

gen oder ungleichartigen Linie ist. Man sieht dabei auf die Linie, die ein Punkt, am Ende oder innerhalb der beweglichen Linie befindlich, durch jene Bewegung beschreibt und man erhält ein Mannigfaltiges von Linien, die entweder in sich selbst zurückkreißend oder vom Scheidel- oder AnfangsPunkt ins Unendliche abkreißend oder fortlaufend sind, was gleichsam Kreiße und Linien in der zweiten Potenz sind, entstanden aus Einer beweglichen und Einer ruhenden Linie erster Potenz. Und so können sich Kreiße und Linien der ersten oder der zweiten Potenz an oder um oder inner Kreiße oder Linien von der zweiten Potenz bewegen und ein festgesetzter Punkt in der beweglichen Linie neue Kreiße oder Linien beschreiben, die dann Kreiße und Linien von der dritten u. s. w. Potenz sind. Und so geben dergleichen immer neue und neuere Verbindungen und Kombinationen Kreiße und Linien von immer höhern Potenzen, die so verschieden sind, so verschieden die bedingenden Umstände waren, die man in der Bedingung festsetzte. —

(25.) 21. Welches unabsehbare, welches unermeßliche Feld für den RaumLerer, daß er noch umzureißen, zu bebauen und tragbar zu machen hat, welche Erndte für ihn! — für den höhern NaturLerer, dieser Linien oder Bilder ihre Würklichkeit in der Natur aufzufinden, aufzusuchen! — —

Welches unabsehbare Feld, welche Unermeßlichkeit von Anwendung der Urrechnenkere oder in ihre letzten rechtmäßigen Gränzen erweiterten Algebra auf diese RaumLere um die verschiedenen GrößenVerhältnisse gleichartiger Dinge unter und aus einander in allgemeinen Formeln zu bestimmen! — Nur der LebensDauer und den Kräften merer nicht eines einzelnen Menschen kann es gelingen, diese verschiedenen Zweige der Geometrie in allen ihren Theilen aus einander zu wickeln. —

(26.) 22. Wie groß muß nun dann jenes Feld für den RaumBewegungsLerer, für den praktischen Urrechnenslerer (Analüsten) werden, wenn die zeither stetige oder gleichförmige Bewegung zur mer oder weniger beschleunigt wachsenden oder abnemenden Bewegung wird, wenn also die verschiedene Größe der Zeit auf die Größe der Bewegung und folglich des beschriebenen Wegs einwürkt und jene bei Bestimmung von dieser mit berücksichtigt werden muß. Und alle diese möglichen Bewegungen sollten in der Natur, nicht statt finden,

sollten im großen und weiten Urrauume von so verschiedenen WeltKörpern nicht beschrieben werden und längst beschrieben worden seün? — — — — — Unmöglich — Denn der UrMenschschaft das beständig bildlich und in der Idee, was Natur ewig würklich schaft. Idealles ist nicht one Reales vorhanden.

(27.) 23. Nur eine von jenen LinearBewegungen und daher entstehenden Linien will ich in Etwas näher beschreiben, um durch ein Beispiel zu zeigen, wie viele Linien von der zweiten und von den höhern Potenzen möglich sind. Eine gerade Linie (oder auch krumme Linie), welche man sich nach Erfordernis an dem andern Ende nach und nach ins unendliche verlängert vorstellen kann, beginne vom ersten Ende an sich nach und nach um einen Kreis z. B. einen Zirkel oder eine Ellipse, herum steif und gerade gleichsam abwickelnd herumzuwälzen, so beschreibt ihr erster oder Anfangs Punkt, von einem Punkte in der Perepherie des Kreißes aus und an, eine sich immer mer uud mer abkreißend aufwickelnde Linie um diesen Kreis herum, was eine Art Spiralkinie ist, die, wenn jene gerade Linie ins Unendliche während jener abwickelnden Umwälzung sich verlängert, auch ins Unendliche abkreißend sich aufwickelt und deren Gestalt durch die Gestalt des zum Grunde liegenden Kreißes, als des Ein-, Zwei-, DreiPunktKreißes u. s. w. oder n Punkt- m Punkt- l Punkt- k Punkt- u. s. w. Kreißes genau bestimmt wird und nach dieser sich richtet.

(28.) 24. In jedem Momente oder überall da, wo die Bewegung abgebrochen wird, ist die Länge der beweglichen geraden Linie, vom Punkte an, wo sie gerade jetzt die Perepherie des Kreißes berürt, bis zu dem, die neuere Linie beschreibenden, EndPunkte ist gleich der null, oder der ein oder merere Mal und zum Theil eben abgewickelten Perepherie des Kreißes und also eine Tangente an der Perepherie des Kreißes, die von dieser bis zum jetzigen EndPunkte der eben beschriebenen Linie reicht. Diese Tangente wäre also algebraisch ausgedruckt das nfache der Perepherie des zum Grunde liegenden Kreißes oder = nP, wo n eine ganze oder gebrochene Zal und als diese einen eigentlichen oder uneigentlichen Bruch vorstellen kann. Die Entfernung des jedesmaligen EndPunktes jener neuen Linie vom MittelPunkte des Kreißes ist gleich einer Sekante, die sich leicht aus der Summe, aus der 2ten Potenz der

erwän-

erwänten Tangente und der 2ten Potenz von der Größe der Entfernung dieser Tangente vom MittelPunkte des Kreißes, als der Sekante zweiten Potenz, bestimmen läßt. Ist z. B. der Kreis ein Zirkel, so ist diese secante $= (r^2 + n^2 p^2)^{\frac{1}{2}}$

(29.) 25. Der, die neue Linie von der 2ten Potenz beschreibende, Punkt braucht nicht gerade jener erste EndPunkt der sich abkreißend wälzenden Linie zu seün, er kann ein anderer seitwärts von ihm abliegender Punkt seün, so daß die sie beide verbindende Linie einen Winkel mit der wälzenden Linie an jenem ersten EndPunkte machen. — — — — Wie sich die Kreiße in eben so vielartige Hüperbeln verwandlen und zu diesen verhalten und umgekert; so verwandlen sich SpiralLinien in eben so vielartige RadLinien und verhalten sich zu diesen und so umgekert. Doch genug von diesen Linien von höherer Potenz. — Wer von den Mathematikern einen schaffenden oder schöpferischen Geist hat, kann sich leicht viele der andern Fälle und Sorten von Linien selbst schaffend vorbilden — andern, denen er mangelt, möchten bei aller Beschreibung sich doch keine Bilder davon entwerfen können. —

(30.) 26. Daß unter diesen unendlich vielen, nach dem allgemeinen und reinen Begriff der Bewegung konstruirten oder gebildeten und bildbaren Linien nicht auch alle jene, den Mathematikern bereits bekannten, Linien der Alten und Neuern sich wieder einstellen sollten, wird und sollte hoffentlich keinen in Erstaunen setzen, sondern eher als notwendig vorkommen. —

Doch wir keren auf einige Augenblicke zur Bildung, Konstruktion der Winkel zurück.

(31.) 27. So wie sich zwei gerade Linien durchschneiden auf der Seite, wo sie sich einander nähern und niemals zusammen treffen, einander parallel sind, so bald sie sich selbst auf keiner Seite nähern, so können sich 2 gleichartige Kurven, oder KreisLinien entweder durchkreuzen, sich blos berüren, einander nähern one beides zu thun, oder einander parallel zu seün. Das Nähere hiervon kann nur in der Entwickelung jeder Gattung und Art vorkommen. —

Daß die gerade Linie, Kurven, oder Kreiße, oder Spiralen, oder RadLinien unter den mannigfaltigsten Richtungen ein oder merere Mal auch durchschneiden oder berüren

rüren, kann und muß, und daß daraus eigene Relationen und Qualitäten statt finden, eintreten; ist notwendige Folge der gekrümmten Linien und leuchtet daher von selbst ein. Je nachdem die Lage oder Richtung der geraden Linien zur stetig gekrümmten Linie ist, so entstehen bald Abschnitte, bald Ausschnitte, bald Trennung in zwei Theile der Kreiße, Kurven, Spiralen, RadLinien u. s. w. Dreht sich nun ein solcher Abschnitt oder Ausschnitt um die gerade Linie herum; so konstruiren sie die unzälig mannigfaltigen Körper, die man Sphären nennen mag. Ihre Mannigfaltigkeit ist nicht zu schätzen. —

(32.) 28. Wenn sich gerade Flächen d. h. Ebenen in einer geraden Linie unter irgend einem Winkel durchschneiden, entstehen die Lagen der sogenannten ebenen Oerter, oder wenn eine Ebene und eine krumme Fläche sich in einer geraden oder krummen Linie durchschneiden, die Lage der gemischten Oerter: sind die beiden sich durchschneidenden FlächenRäume stetig gekrümmte; so ist die Lage der gekrümmten Oerter da.

(33.) 29. Zeither war bei Durchschneidung zweier Ebenen in einer geraden Linie der KörperRaum nach zwei Seiten unendlich und offen, unbegränzt; jetzt durchschneidet eine dritte Ebene die beiden vorigen unter einer bestimmten Richtung, begränzt also der KörperRaum nach einer zweiten Dimension, alle drei Ebenen nähern sich auf einer Seite und auf der entgegengesetzten entfernen sie sich; hier lassen sie die Unendlichkeit offen; da auf der Seite, wo sich alle drei Ebenen einander nähern, treffen sie alle drei nach gehöriger Verlängerung derselben in nur einem und ebendemselben Punkt zusammen und hier bilden sie den KörperWinkel, d. h. die Ecke.

(34.) 2ε. Eben weil drei Ebenen, der Ecke entgegengesetzt, die Unendlichkeit offen lassen, kann nur eine vierte Ebene den ersten körperlichen endlichen Raum, der von geraden Flächen begränzt wird, bilden, konstruiren, weil sie mit jezwei der übrigen Flächen, noch drei Ecken und 3 LinienKanten bildet. Man nennt diesen KörperRaum eine dreiseitige Püramide zeither, obgleich vier Ebenen ihn erst begränzen; — auch Tetraeder.

Durch Zusammenfügung der SeitenFlächen zweier oder mererer Vierecke an gleichen Seiten entstehen die Fünfecke, Sechsecke, Siebenecke, Achtecke (Oktoeder) u. s. w.

(35.) 29. Säulen nennt man diejenigen KörperRäume, wo die Ausdenung nach einer der drei Dimensionen grösser als jede der beiden übrigen ist. Die Anzal der geraden SeitenFlächen bestimmt den Namen der Säulen. Man sagt eine dreiseitige, vierseitige, oder *n*seitige Säule, wenn drei, vier oder n SeitenFlächen den KörperRaum in der längsten Dimension begränzen. Gewönlich pflegen zwei Ebenen zu beiden Seiten diese SeitenFlächen zu beiden Seiten zu durchschneiden und so den KörperRaum zu begränzen. Diese GränzEbenen erhalten dann die Gestalt des Polügons von eben so viel SeitenLinien als die Säule SeitenFlächen hat. Oefters laufen aber auch die SeitenFlächen der Säulen gebeugt entweder in einer Linie, Kante genannt, oder in einem Punkte, d. h. in einer Ecke zusammen; dann ist die Säule entweder zugeschärft oder zugespitzt. — Doch von allen diesen in der Lere der durch Ebenen begränzten KörperRäume kann das Nähere vorkommen. —

(36.) 30. Hat der Geometer seine stetig gekrümmten Linien, die einen endlichen oder unendlichen FlächenRaum begränzen und Kreiße, KnotenKreiße, Kurven, Parabeln, Hüperbeln, Spiralen oder RadLinien heißen mögen, konstruirt, d. h. gebildet, geschaffen; so werden ihm die Auffuchungen jeder Qualitäten irgend einer derselben nicht schwer fallen können, wenn er sich nur das Wie der Schöpfung jeder rein im Anschauen gegenwärtig erhält und nicht eher nach Quantitäten (der Quantitäten oder der Qualitäten) fragt, als bis er alle und jede Qualitäten und jenes Wie jeder krummen Linie rein erkennt. —

(37.) 31. Dann kann und wird es ihm nicht schwer fallen, die Art und Weise zu finden, einzusehen, wie jede stetig gekrümmte Linie qua linea vergleichbar, meßbar mit einer andern stetig gekrümmten Linie; oder mit irgend einer der ihr angehörigen (zugeordneten) geraden Linien inner oder auffer ihr, als Linie schlechthin (qua linea) meßbar, vergleichbar seün; d. h. mit einem Worte wie, wodurch, und auf was Art sie rektificirt, der eingeschlossene FlächenRaum quadrirt werden könne. —

(38.) 32. Da die festen Punkte inner einem nPunktKreiße und inner jeder stetig gekrümmten Linie oder die KardinalPunkte, welche die stete Krümmung jeder bedingen oder bestimmen, die hier fast alles Bedingenden sind und notwendig seün müssen; so kann auch nur an

und

und um sie und durch sie die Rektifikation jeglicher begründet, bedingt, und möglich seün.

Von diesen Kardinal-Punkten gleichsam aus sind Stralen (gerade Linien) oder Radien nach allen Richtungen nach dem Umkreiße, d. h. der Peripherie des jedesmaligen Kreißes oder der jedesmaligen Kurve und deren Theile hin zu ziehen. Man pflegt Theile der Kreiße oder der Kurven Kreiße- oder Kurven-Bögen zu nennen.

(39.) 33. Jezwei der festen die Krümmung des n-Punkt-Kreißes oder der Kurve bedingenden Punkte (d h. Kardinal-Punkte) sind leicht durch eine gerade Linie zu verbinden und diese zu beiden Seiten nach Belieben zu verlängern. Sie werden gewisse Haupt-Punkte an und inner der Peripherie jedes Kreißes oder jeder Kurve begründen, welche Scheitel-Punkte genannt zu werden pflegen. Sie sind gewönlich Anfangs-Punkte des Krümmens oder vielmer der Krümmung.

(40.) 34. Die von und nach diesen Scheitel- und den andern End-Punkten der Bögen von Punkt-Kreißen, Kurven und Spiralen nach und aus jenen Kardinal-Punkten, Foken derselben, gezogenen geraden Linien sind die notwendigen Radien, welche an Foken die Winkel-Oefnungen der Bögen bestimmen, sich durchkreuzen und welche absolut notwendig zur Erkenntnis der Qualitäten u. s. w. jeder stetig gekrümmten Linie sind.

(41.) 35. Von diesen Foken und von keinen andern der beliebigen Zentral-Punkten aus sind diese Radien nach allen Richtungen nach den Bögen der Gekrümmten hin zu ziehen, weil nur auf sie jegliche Kreiße, Kurven oder Spiralen während ihrem Krümmen in allen ihren Atomen sich beziehen, durch sie bedingt werden und nur gegen diese Foken Stetigkeit beobachten können; und umgekert diese Foken der Stralen oder Radien durch die Krümmung der Kreiße, Kurven oder Spiralen bedingt sind.

Gerade Linien, welche von dem einen End-Punkt der Bögen zu dem andern gezogen sind, heißen Senen. —

(42.) 36. Eine gerade Linie, welche parallele Senen unter einem und ebendemselben Neigungs-Winkel halbirend durchschneidet und auch durch das gemeinsame Mittel aller Bögen derselben hindurch gehet, heißt Aks-Linie. Ihr Durchschnitt durch dieses Mittel ist senkrecht und der Durchschnitts-Punkt pflegt eben Scheitel der Gekrümmten genannt

nannt zu werden. Ist die Zuname der Bögen zu beiden Enden bei parallelen Senen gleich gros, so durchschneidet die AksLinie alle diese Senen senkrecht. Spiralen haben in diesem Sinne keine AksLinien. —

Durch einen oder zwei solcher Foken der Radien gehet jegliche AksLinie.

(43.) 37. Gerade Linien von den EndPunkten aller Bögen der Gekrümmten auf die AksLinie gefällt, heißen senkrechte Ordinaten oder Sinuße der rücksichtlichen Bögen; die Entfernungen vom Scheitel bis zu diesen DurchschneidungsPunkten Abszißen oder Quersinuße der rücksichtlichen Bögen. (Ordinate und Absziße sind Radien des Bogens jeder Gekrümmten, die sich in Verbindung von unveränderlichen Größen wechselseitig in analütischen Funktionen bestimmen.)

Die eine von diesen beiden Linien kann entweder größer, oder kleiner als die andere oder ihr gleich seün.

(44.) 38. Die Gekrümmte rückt näher oder fernt sich mer der AksLinie wie die Absziße gegen die Ordinate immer größer oder kleiner wird und umgekert wie u. s. w. so. Die stetig gekrümmte Linie — sie seü Kreis, Kurve, Spirale —, bei ihrem gesetzmäßigen Krümmen nähert sich entweder mer und mer einem oder entfernt sich so von einem Punkte — gleichviel dem Zentrum oder dem Fokus, — oder (3tens) bleibt gleich weit von ihm entfernt und nahe. Im dritten Fall allein ist der All-EinpunktKreis, d. h. der gemeine Zirkel und das Gesetz der Krümmung ist mit und in jedem Momente dasselbe identische und hier sind die Radien alle einander gleich. Im 2ten und 3ten Falle ist es in und mit jedem Momente ein verhältnismäßig geändertes; ein stetig gemertes oder gemindertes Krümmen.

(45.) 39. Stralen oder Radien von einem Fokus aus werden an der Peripherie (der Gekrümmten) inner derselben entweder auf demselben Wege in denselben Punkt zurückgeworfen, oder gebrochen nach einem der andern Foken — positive oder negative — oder auch ins Unendliche hinaus geworfen. —

(46.) 3ε. Im ersten Falle findet kein Abstralungs- oder BrechungsWinkel der Stralen aus dem Fokus an und inner dem Ende jedes Bogens des Gekrümmten statt oder er ist = null. Im zweiten Falle ist er da und das vorzüglichste was in stetem Bezug auf den Bogen in qualitativer

und

und quantitativer Hinsicht berücksichtigt und nie außer der Acht gelassen werden muß und kann. —

Mittelst seiner Hälfte ist allein die Rektifikation des Bogens der Gekrümmten möglich, da, sie ist nach Erfordernis zur WinkelOefnung am Fokus entweder hinzuzufügen oder davon abzuziehen ist — wie sichs einst unten aus richtiger Ansicht der Sache ergiebt. —

(47.) 39. Jeder der beiden geraden Linien, welche jeden dieser AbstralungsWinkel an und inner den beiden Enden eines jeglichen Bogens der Gekrümmten in zwei gleiche Hälften theilen, steht auf dem EndPunkte dieses Bogens senkrecht, und beide bilden sonach verlängert einen Winkel und dieser mit dem Bogen selbst einen Ausschnitt; diese beiden sich durchschneidenden geraden Linien, welche senkrecht auf den zwei EndPunkten des Bogens aufstehen, sind die NormalRadien, welche zur Rektifikation des Bogens der Gekrümmten dienen. Der geometrische Mittelere aus beiden ist der erforderliche Radius, einen ZirkelBogen um ihren DurchschneidungsPunkt von gleicher WinkelOefnung zu beschreiben, welcher dem Bogen der Gekrümmten gleich ist.

(48.) 40. Diese StralenBrechungsWinkel stehen entweder im geraden Verhältnis der Zuname der Bögen, oder sie nemen ab, wie diese zunemen; dies ergiebt sich aus der Beschaffenheit der AusgangsPunkte und der Anschauung der Figuren selbst. —

In dem Falle, daß eine Gekrümmte einem festen Punkte sich mer und mer nähert, ist das Krümmen in ihr ein stetig abnemend Kleineres, da beginnt es vom Größten und schreitet fort bis zum Kleinsten, welches vom ihm im Endlichen oder erst im Unendlichen erreicht wird.

(49.) 41. Ersteres thun Kreiße, wenn sie sich von der größern zur kleinern Akse zukrümmen, von wo an das Krümmen ein zunemend Größeres wird bis zur Ankunft an der größern Akse.

Bei Kurven erreicht das Krümmen sein Kleinstes im Unendlichen, hier gehen die Radien vom Kleinsten bis zum unendlich Größten alle zwischen Verhältnisse durch, weil eine Kurve ins Unendlich hinausgeht. —

Weil Spiralen um sich selbst, erweiternd, kreißen, so hat jegliche in jedem Momente ein ewig unveränderliches

Gesetz

Gesetz des Krümmens, es ist nämlich eben jenes sich stetige Aufschleußen, Erweitern im Selbstumkreißen. —

(50) 42. Wie Radien und Bögen der Gekrümmten in Hinsicht ihrer Veränderungen unter einander stehen, ob sie entweder beide zugleich zu- und abnemende oder im Zu- und Abnemen einander entgegengesetzte sind, ergiebt sich nur durch Konstruktion und Anschauung jeglicher Art von stetig gekrümmter Linie. —

Soviel seŭ genug als Einleitung in die ware und vollständige Geometrie oder Raumlere. — Jetzt nur einige Rektifikationen, der sogenannten Kegel Schnitte, deren Bewerkstelligung felte. —

Ware

Ware

Rektifikationen und Quadraturen

des

Zirkels, der Parabel, Ellipse, Hüperbel und der Radlinie

one die geringste (vertiefte) höhere Analüsis.

Zweite Abtheilung des Ganzen.

Einleitung

in die

Rektifikation

der

Kreiße, Parabel, Ellipse, Hüperbel und der Rad-Linie.

Trotz der in meiner rein wissenschaftlichen Deduktion oder Ableitung der Verhältniße je zweier von den verschiedenen trigonometrischen Linien zu einander u. s. w. liegenden merkwürdigen Resultate und so fruchtbaren Anweißung die verschiedenen Kreiße und Kurven aus ihren angehörigen geraden Linien und umgekert zu bestimmen und finden zu lernen, möchte es doch noch so lange Zweifler an der ersten Evidenz und Verziehbarkeit meiner Methode geben, bis sie die That vor Augen haben.

Manche andere werden schnell vielleicht auf die sogleich folgende Entwickelung verfallen, die Auflößung jeder Kurve und jedes Kreißes aufgefunden zu haben glauben, die Untersuchung wird aber ein anderes ergeben und zeigen, diese sey ganz gewis nicht die AuflößungsMethode, die ich für die meinige erkennen würde. —

Ich hoffe, man wird sich einstweilen an den sogenannten KegelSchnitten oder ersten Linien aus der höhern Geometrie, der Parabel, Ellipse und Hüperbel begnügen.

Bekanntlich sind nur im Zirkel die verschiedenen Radien einander gleich, in allen andern Kreißen und Kurven

sind

sind sie sich in einem und ebendemselben Kreis oder in derselben Kurve gänzlich ungleich, demongeachtet stehen sie doch in gewissen Verhältnissen und Beziehungen zu einander. Auf diese Ungleichheit und dieses Verhalten ist vorzüglich zu achten.

Wie verhalten sich die Abszißen und so auch die Coabszißen von gleich großen Bögen zu einander? etwa rücksichtlich wie die Radien, in denen sie liegen; desgleichen die Ordinaten rücksichtlich wie die Radien, auf denen sie senkrecht stehen. Ein LerSatz, der wol ser klar seün möchte? —

Zur Sache.

Die Figur 4 in der Tabelle mag hier für die Kreiße und Kurven änliche Figuren bedeuten wie jene für den Zirkel in Ws Schrift rein wissenschaftliche Deduktion oder Ableitung der waren Verhältnisse u. s. w. 1800. Leipzig Magazin für Litt.

Der Analogie und Kürze des Ausdrucks wegen saget Quersinus für Absziße, Sinus für senkrechte Ordinate.

A seü der ScheitelPunkt, AC seine AksLinie, die senkrecht durch den Scheitel, in welcher bei Kurven der BrennPunkt, bei Kreißen der MittelPunkt und die BrennPunkte liegen. AB seü ein gegebener Bogen der Kurve, BD und DK auch gegebene Bögen derselben. C seü ein Punkt in der AksLinie, in Kreißen der MittelPunkt. AE die senkrechte Absziße oder der Quersinus, EC der Kosinus, BE die Ordinate oder der Sinus auf der Abszißen Linie vom Bogen AB. Ferner für den Bogen BD, BG der Quersinus, DG Sinus, GC Kosinus: für den Bogen DK ist DM Quersinus, KM Sinus, MC Kosinus. AF ist Quersinus, DF Sinus, FC Kosinus, alles für den Bogen AB + BD oder für AD. Es seü AL Quersinus, KL Sinus und LC Kosinus für den Bogen AD + DK oder für AK. AC der untere Radius von AB, BC der obere Radius von AB und der untere von BD, DC seü der obere Radius von BD und AD und der untere von DK; KC der obere Radius von DK und AK, Gf eine Parallele vom Sinus BE gefällt aus dem EndPunkt vom sinus und cos. von β auf den ersten Radius von AB, gleich Fg, und gD die Ergänzung dazu zum Sinus DF vom Bogen AD. Desgleichen seü Mk = mK und mL die Ergänzung zu mK zum Sinus LK vom Bogen AL. Der Kürze wegen werde

de der Bogen AB durch α, BD durch β, DK durch γ und AD durch ω oder $\alpha+\beta$ und AK durch ε oder $\alpha+\beta+\gamma$ bezeichnet, ferner AC durch rad α, BC durch rad β, DC durch rad γ oder rad $(\alpha+\beta)$, KC durch rad $(\alpha+\beta+\gamma)$, weil hier die Radien sich nicht gleich sind.

In Fig. 4 erstlich	Gegeben		Zusuchen
der Bogen	AB $=\alpha$	BD $=\beta$	AD $=\alpha+\beta$
Radius	AC $=$ rad α	BC $=$ rad β	DC $=$ rad $(\alpha+\beta)$
Sinus	BE $=$ sin α	DG $=$ sin β	AF $=$ quers $(\alpha+\beta)$
Quersinus	AE $=$ quers α	BG $=$ quers β	DF $=$ quers $(\alpha+\beta)$
Kosinus	EC $=$ cos α	GC $=$ cos β	FC $=$ cos $(\alpha+\beta)$

In Fig. 4 ferner	Gegeben		Zusuchen
der Bogen	AD $=\omega$	DK $=\gamma$	AK $=\omega+\gamma$
Radius	AC $=$ rad ω	DC $=$ rad γ	KC $=$ rad $(\omega+\gamma)$
Sinus	DF $=$ sin ω	KM $=$ sin γ	KL $=$ sin $(\omega+\gamma)$
Quersinus	AF $=$ quers ω	DM $=$ quers γ	AL $=$ quers $(\omega+\gamma)$
Kosinus	FC $=$ cos ω	MC $=$ cos γ	LC $=$ cos $(\omega+\gamma)$

Es wird zu finden verlangt der Sinus, Quersinus und Kosinus der Summe der beiden Bogen α und β; zweitens in dem zweiten Fall der Sinus, Quersinus und Kosinus der Summe der beiden Bogen ω und $\gamma = \alpha+\beta+\gamma$.

In Fig. 4 besteht die gesuchte Größe DF aus zwei Stücken $Dg = x$ und $gF = Gf = y$ ferner die gesuchte Größe CF aus fC weniger $fF = Gg = w$ und $fC = z$. Welches einzeln zu suchen, zu addiren oder nach Erfordernis zu subtrahiren ist.

In Fig. 4 erster Fall sind die Dreiecke CEB; CfG; DgG ähnlich, im 2ten Fall CFD, CKM, KmM. Also
CB : BE = CG : Gf = DG : Gg auch CD : DF = CM : Mk = KM : Mm
CB : CE = CG : Cf = DG : Dg auch CD : CF = CM : Ck = KM : Km

Nun ist $\sin(\alpha+\beta) = x+y$ und rad β : sin α = cos β : x

also $x = \sin\alpha \cdot \frac{\cos\beta}{\text{rad}\,\beta}$; rad β : cos α = sin β : y und $y = \cos\alpha \cdot \frac{\sin\beta}{\text{rad}\,\beta}$ also $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \frac{\cos\beta}{\text{rad}\,\beta} + \cos\alpha \frac{\sin\beta}{\text{rad}\,\beta}$; oder $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\text{rad}\,\alpha} = \frac{\sin\alpha\,\cos\beta}{\text{rad}\,\alpha\,\text{rad}\,\beta} + \frac{\cos\alpha}{\text{rad}\,\alpha} \cdot \frac{\sin\beta}{\text{rad}\,\beta}$ Das heißt: den Sinus der Summe der Bögen durch den Radius, auf dem er steht, dividirt, ist gleich

der

$\cos\alpha . \cos\beta . \sin\gamma . \cos\delta . \cos\varepsilon + \cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma . \sin\delta . \cos\varepsilon + \cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma . \cos\delta . \sin\varepsilon - \sin\alpha . \sin\beta . \sin\gamma . \cos\delta . \cos\varepsilon - \sin\alpha . \sin\beta . \cos\gamma . \sin\delta . \cos\varepsilon - \sin\alpha . \sin\beta . \cos\gamma . \cos\delta . \sin\varepsilon - \sin\alpha \cos\beta . \sin\gamma . \sin\delta . \cos\varepsilon - \sin\alpha . \cos\beta . \sin\gamma . \cos\delta . \sin\varepsilon - \sin\alpha . \cos\beta . \cos\gamma . \sin\delta . \cos\varepsilon - \cos\alpha . \sin\beta . \sin\gamma . \cos\delta . \sin\varepsilon - \cos\alpha . \sin\beta . \cos\gamma . \sin\delta . \sin\varepsilon - \cos\alpha . \cos\beta . \sin\gamma . \sin\delta . \sin\varepsilon)$

$$\frac{\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)}{\text{rad}\,\alpha} = (\text{rad}\,\alpha\ \text{rad}\,\beta\ \text{rad}\,\gamma\ \text{rad}\,\delta\ \text{rad}\,\varepsilon)^{-1}(\cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma . \cos\delta . \cos\varepsilon - \cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma . \sin\delta . \sin\varepsilon - \cos\alpha . \cos\beta . \sin\gamma . \cos\delta . \sin\varepsilon - \cos\alpha . \sin\beta . \cos\gamma . \cos\delta . \sin\varepsilon - \cos\alpha . \sin\beta . \sin\gamma . \sin\delta . \cos\varepsilon - \sin\alpha . \cos\beta . \cos\gamma . \sin\delta . \cos\varepsilon - \sin\alpha . \cos\beta . \sin\gamma . \cos\delta . \cos\varepsilon - \sin\alpha . \sin\beta . \cos\gamma . \cos\delta . \cos\varepsilon + \cos\alpha . \sin\beta . \sin\gamma . \sin\delta . \sin\varepsilon + \sin\alpha . \cos\beta . \sin\gamma . \sin\delta . \sin\varepsilon + \sin\alpha . \sin\beta . \cos\gamma . \sin\delta . \sin\varepsilon + \sin\alpha . \sin\beta . \sin\gamma . \cos\delta . \sin\varepsilon + \sin\alpha . \sin\beta . \sin\gamma . \sin\delta . \cos\varepsilon)$$

6) Wenn man $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon$ in 2, 3, 4, 5 setzt und dann bedenkt, daß dann $\frac{\sin\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = \frac{\sin\beta}{\text{rad}\,\beta} = \frac{\sin\gamma}{\text{rad}\,\gamma} = \frac{\sin\delta}{\text{rad}\,\delta} = \frac{\sin\varepsilon}{\text{rad}\,\varepsilon}$ auch $\frac{\cos\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = \frac{\cos\beta}{\text{rad}\,\beta} = \frac{\cos\gamma}{\text{rad}\,\gamma} = \frac{\cos\delta}{\text{rad}\,\delta} = \frac{\cos\varepsilon}{\text{rad}\,\varepsilon}$ ist. So ergeben sich die Ausdrücke für Sinus und Kosinus von 2α, 3α, 4α, 5α oder 2β, 3β, 4β, 5β; oder 2γ, 3γ, 4γ, 5γ und dergleichen aus dem Sinus und Kosinus des einfachen Bogens zu finden.

$$\frac{\sin 2\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = 2\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha}{\text{rad}\,\alpha^2} \quad \text{oder} \quad \sin 2\beta = 2\frac{\sin\beta\ \cos\beta}{\text{rad}\,\beta^2}$$

$$\frac{\cos 2\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = \frac{\cos\alpha^2}{\text{rad}\,\alpha^2} - \frac{\sin\alpha^2}{\text{rad}\,\alpha^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\cos 2\beta}{\text{rad}\,\beta} = \frac{\cos\beta^2}{\text{rad}\,\beta^2} - \frac{\sin\beta^2}{\text{rad}\,\beta^2};$$

$$\frac{\sin 3\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = 3\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha^2}{\text{rad}\,\alpha^3} - \frac{\sin\alpha^3}{\text{rod}\,\alpha^3}; \quad \frac{\cos 3\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = \frac{\cos\alpha^3}{\text{rad}\,\alpha} - 3\frac{\cos\alpha\ \sin\alpha^2}{\text{rad}\,\alpha^3}$$

$\sin 4\alpha$

$$\frac{\sin 4\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = 4\frac{\sin\alpha\,\cos\alpha^3}{\text{rad}\,\alpha^4} - 4\frac{\sin\alpha^3\,\cos\alpha}{\text{rad}\,\alpha^4};\quad \frac{\cos 4\alpha}{\text{rad}\,\alpha}$$

$$= \frac{\cos\alpha^4}{\text{rad}\,\alpha^4} - 6\frac{\cos\alpha^2\,\sin\alpha^2}{\text{rad}\,\alpha^4} + \frac{\sin\alpha^4}{\text{rad}\,\alpha^4};\quad \frac{\sin 5\alpha}{\text{rad}\,\alpha} =$$

$$5\frac{\sin\alpha\,\cos\alpha^4}{\text{rad}\,\alpha^5} - 2.5\frac{\sin\alpha^3\,\cos\alpha^2}{\text{rad}\,\alpha^5} + \frac{\sin\alpha^5}{\text{rad}\,\alpha^5};\quad \frac{\cos 5\alpha}{\text{rad}\,\alpha}$$

$$= \frac{\cos\alpha^5}{\text{rad}\,\alpha^5} - 2.5\frac{\cos\alpha^3\,\sin\alpha^2}{\text{rad}\,\alpha^5} + 5\frac{\cos\alpha\,\sin\alpha^4}{\text{rad}\,\alpha^5};$$

$$\frac{\sin 6\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = 6\frac{\sin\alpha\,\cos\alpha^5}{\text{rad}\,\alpha^6} - 4.5\frac{\sin\alpha^3\,\cos\alpha^3}{\text{rad}\,\alpha^6} +$$

$$6\frac{\sin\alpha^5\,\cos\alpha}{\text{rad}\,\alpha^6};\quad \frac{\cos 6\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = \frac{\cos\alpha^6}{\text{rad}\,\alpha^6} - 3.5\frac{\cos\alpha^4\,\sin\alpha^2}{\text{rad}\,\alpha^6}$$

$$+ 3.5\frac{\cos\alpha^2\,\sin\alpha^4}{\text{rad}\,\alpha^6} - \frac{\sin\alpha^6}{\text{rad}\,\alpha^6};\quad \frac{\sin 7\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = 7\frac{\sin\alpha}{\text{rad}\,\alpha};$$

$$\frac{\cos\alpha^6}{\text{rad}\,\alpha^6} - 5.7\frac{\sin\alpha^3\,\cos\alpha^4}{\text{rad}\,\alpha^7} + 3.7\frac{\sin\alpha^5\,\cos\alpha^2}{\text{rad}\,\alpha^7} -$$

$$\frac{\sin\alpha^7}{\text{rad}\,\alpha^3};\quad \frac{\cos 7\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = (\cos\alpha^7 - 3.7\cos\alpha^5\,\sin\alpha^2 +$$

$5.7.\cos\alpha^3\,\sin\alpha^4 - 7\cos\alpha\,\sin\alpha^6)\,\text{rad}\,\alpha^{-7}$

$\sin 8\alpha\,\text{rad}\,\alpha^{-1} = (8\sin\alpha\,\cos\alpha^7 - 7.8\sin\alpha^3\,\cos\alpha^5 +$
$7.8\sin\alpha^5\,\cos\alpha^3 - 8\sin\alpha^7\,\cos\alpha)\,\text{rad}\,\alpha^{-8}$

$$\frac{\cos 8\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = (\cos\alpha^8 - 4.7\cos\alpha^6\,\sin\alpha^2 + 2.5.7\cos\alpha^4$$

$\sin\alpha^4 - 4.7.\cos\alpha^2\,\sin\alpha^6 + \sin\alpha^8)\,\text{rad}\,\alpha^{-8}$

$$\frac{\sin 9\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = (9\sin\alpha\,\cos\alpha^8 - 3.4.7\sin\alpha^3\,\cos\alpha^6 +$$

$2.7.9\,\sin\alpha^5\,\cos\alpha^4 - 4.9.\sin\alpha^7.\cos\alpha^2 + \sin\alpha^9)\,\text{rad}\,\alpha^{-9}$

$$\frac{\cos 9\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = (\cos\alpha^9 - 4.9.\cos\alpha^7\,\sin\alpha^2 + 2.7.9\cos\alpha^5$$

$\sin\alpha^4 - 3.4.7\cos\alpha^3.\sin\alpha^6 + 9\cos\alpha\,\sin\alpha^8)\,\text{rad}\,\alpha^{-9}$
u. ſ. w.

7) Da $\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,\text{rad}\,\alpha$ oder $\frac{\text{tang}\,\omega}{\text{rad}\,\omega} = \frac{\sin\omega}{\cos\omega}$

und $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\text{corad}\,\alpha$ oder $\frac{\cot\omega}{\text{corad}\,\omega} = \frac{\cos\omega}{\sin\omega}$ ſo laſſen ſich aus den letzten Ausdrücken die Formeln, die Tangen-

ren Verh. jezw. trig. Lin. u. s. w. Wer jedoch die Warheit, Allgemeinheit und Gültigkeit dieses Satzes leugnet, der bezweifelt und leugnet alle mathematische Gewisheit. — Da im Zirkel vom Zentrum aus alle Radien gleich gros sind, so hat man nur in dem Obigen (6) alle Radien, rad α, rad β, rad γ, u. s. w. einander gleich und $\cos\alpha^2 = \text{rad}\,\alpha^2 - \sin\alpha^2$ zu setzen, und ist sicher von obigem Satze überzeugt.

Urware kurze philosophisch-mathematische Auflösung der GeneralProbleme der berechnenden KreisLere.

Wenn ein WinkelBogen durch seinen Sinus, seinen Quersinus oder seine Tangente meßbar ist; so ist auch hinwiederum der Sinus, Quersinus, die Tangente u. s. w. durch den WinkelBogen meßbar, weil dann bei einer ein Mal angenommenen Relation zwischen zwei Größen, bald die eine, bald die andere als Einheit oder gegebene Größe im wechselseitigen Messen angesehen werden kann (und auch die eine o wird, wenn die andere es wird.) — (Bogen und Sinus, als Linien schlechthin, müssen durch einander meßbar seün; als ungleichartige Linien, aber nur in einem transzendenten Verhältnisse, weil nur gleichartige Linien analütisch bestimmbar sind.)

"Soll nun würklich jeder Bogen, durch seinen ihm zugeordneten Sinus u. s. w. und umgekert, gemessen werden können, so muß es jedoch in einem transzendenten Verhältnisse, durch eine transzendente Funktion von der unendlichsten Dimension, folglich in einer unendlichen, sich dem waren Werte im Unendlichen ganz nähernden Reihe geschehen; so muß diese Funktion von der ∞ten Dimension seün (die nach einem Gesetze und nach einer beständigen Differenz fortschreitenden Potenzen der gegebenen Größe, welche zwischen 1 und ∞ fallen, enthalten) und sich nicht durch Erheben zu einer ganzen oder gebrochenen Potenz, oder durch irgend einen KunstGriff aus einer transzendenten in eine algebraische Funktion verwandeln lassen. — Ihr beständiger Karakter ist Unveränderlichkeit und das ewig gleichbleibende Fortschreiten in das Unendliche. Warum? — Weil nur gleichartigen Größen die Möglichkeit der Verwandlung in eine endliche, d. i. algebraische oder analütische Funktion, zukömmt,

zukömmt, und der ViertelKreis, als eine ewig krumme Linie, und sein Halbmesser als eine ewig gerade Linie, ganz und gar ungleichartige, d. i. transzendente Größen in gegenseitiger Beziehung sind, die daher auch nur in einem transzendenten Verhältnis mit einander stehen können. [Man möchte hier die Unendlichkeit der Reihe für postulirt halten, weiter unten wird sie jedoch sogleich so scharf, als es möglich ist, erwießen werden.]

A) Wenn und wiefern aber ein Bogen (Winkel) durch seinen Sinus (ob im endlichen oder unendlichen Ausdrucke ist zuvörderst hier jetzt gleichgültig,) meßbar ist; so und in sofern muß auch jeder andere Bogen, folglich auch der 2, 3, 4, 5, 6 u. s. f. fache Bogen rücksichtlich durch seinen ihm zugehörigen Sinus in gleicher Form meßbar seün. Es muß auch in der Funktion, den Bogen aus seinen Sinus zu finden, der Sinus als Faktor in allen möglichen Gliedern vorkommen, weil Bogen und Sinus vom AnfangsPunkt an zugleich Etwas oder zugleich Null sind und werden.

2) Dann ist aber auch der 2fache, 3fache, 4fache, 5fache, 6fache u. s. w. Bogen durch des einfachen Bogens Sinus meßbar, und zwar auf eine doppelte Weise.

3) Erstlich, weil jeglicher Bogen ein bestimmtes unveränderliches Vielfaches des einfachen Bogens ist, und da dieser durch seinen Sinus meßbar angenommen wurde, sie, die Vielfachen, dann durch diesen es also auch seün müssen. —

4) Zweitens, weil und dies ist höchst merkwürdig, die Sinusse des 2fachen, oder 3, 4, 5, 6 u. s. w. fachen, mithin auch wol des n oder (2n), (2n + 1) . . . (∞ − 1) ∞, (∞ + 1) fachen Bogens durch des einfachen Bogens Sinus bestimmbar sind, und diese analütischen Ausdrücke oder diese ihre Werte ihnen substituirt werden können.

5) Und zwar sind die ungeraden Vielfachen in analütischen Ausdrücken von endlicher PotenzenReihe des einfachen Bogens Sinus bestimmbar, wo jegliches Mal diese Reihe mit der 1sten Potenz anfängt und mit der Potenz des aufgegebenen Vielfachen schließt; dagegen die geraden Vielfachen nur in analütischen Ausdrücken von einer ins Unendliche fortlaufenden Reihe aller nach einander von 1 an fortlaufenden ungeraden Potenzen des einfachen Bogens Sinus. (Siehe Dedukt. pag. 16.)

6) Er-

6) Erweis. Weil aber des 2fachen, oder 4fachen, oder 6fachen u. s. w. Bogens Sinus nur in einer bestimmten ins Unendliche fortlaufenden PotenzenReihe von unveränderlich gleicher EksponentenFolge durch des einfachen Bogens Sinus analütisch bestimmbar ist; so kann, nach geschehener Substitution, der 2fache, 4fache, 6fache u. s. w. Bogen auch nur in einer ähnlichen unendlichen Reihe von gleicher Folge der Eksponenten der Potenzen durch des einfachen Bogens Sinus analütisch bestimmbar seün.

$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha (1 - \sin\alpha^2)^{\frac{1}{2}} = 2\sin\alpha - \sin\alpha^3 - \frac{1}{4}\sin\alpha^5 - \frac{1}{8}\sin\alpha^7$ u. s. w.

$\sin 4\alpha = 4\sin\alpha - 2.5\sin\alpha^3 + \frac{7}{2}\sin\alpha^5 - \frac{3}{4}\sin\alpha^7$ u. s. w.

$\sin 6\alpha = 6\sin\alpha - 5.7\sin\alpha^3 + \frac{6.7.9}{2.2.2}\sin\alpha^5 - \frac{9.11}{2.4}\sin\alpha^7$ u. s. w.

7) Ist dies aber der 2fache, 4fache, oder 6fache u. s. w. Bogen; so muß und kann notwendig der einfache Bogen, als das 2tel, 4tel, 6tel u. s. w. davon und somit jeder andere Bogen durch seinen Sinus auch nur in einer ewig unendlichen Reihe (von gleicher Folge der Potenzen des Sinus) oder in einer Annäherung ins Unendliche bestimmbar und meßbar seün. — Folglich ist ein jeder Bogen aus seinem Sinus nur in einer unendlichen Reihe von Gliedern oder in einer Annäherung ins Unendliche gegeben. —

8) Doch man möchte sich an diesem Erweiße der Unendlichkeit der Reihe, wie ein Erl. Rez., stoßen, weil er auf die Anwendung der BinomialFormel auf gebrochene Eksponenten oder IrrationalGrößen, hier den Kosinus durch eine Funktion des Sinus und Halbmessers auszudrücken, sich gründet, und man die Allgemeinheit der Anwendung dieser Formel nur erst mittelst der DifferenzialRechnung beweißen zu können glaubt, da doch umgekert, — gesetzt einmal, die Prämissen dieser Rechnung wären richtig, und man wollte ihr einigen Anspruch auf Warheit und Gültigkeit einiger Sätze zugestehen, — dieser Beweis der BinomialFormel vorher one sie streng wissenschaftlich gefürt seün muß und ser füglich gefürt werden kann. —

Auch verschwindet onedies sogleich die Irrationalität der Ausdrücke für jeden $\sin 2n\alpha$ aus den $\sin\alpha$ zu finden,

wenn

wenn man diese Ausdrücke oder Funktionen in die 2te oder in jede gerade Potenz erhebt und jeglicher Ausdruck für $\sin 2n\alpha$ wie für $\sin(2n+1)\alpha$ wird zu einem endlichen analütischen Ausdruck, der mit der Potenz 2 anfängt und rücksichtlich mit der Potenz $4n$ oder $4n+2$ schließt. Und die Unendlichkeit der Reihe, für den Bogen aus seinem Sinus und umgekert zu finden, darf eben, weil sie heterogene und transzendente Größen sind, durch kein Potenziren aufgehoben werden.

Ich liefere daher folgenden einzig möglichen und strensten Erweis der Unendlichkeit der Reihe, welcher auch von irgend einer Potenz des Bogens gilt.

9) Weil in den Ausdrücken oder Funktionen, aus der Tangente des einfachen Bogens die Tangente des 2, 3, 4, u. s. w. oder des merfachen Bogens zu finden, gar keine Anwendung der BinomialFormel auf IrrationalGrößen eintreten kann, da deren darin keine vorhanden sind, so ließe sich ein Erweiß der Unendlichkeit jener Reihe, den Bogen aus seiner Tangente zu finden, auch hierauf gar nicht gründen. Durch ein bloßes ins Unendliche fortgesetztes Dividiren ergiebt sich die Unendlichkeit der Reihe, die Tangente des 2fachen Bogens aus der des einfachen zu finden, und so in den Ausdrücken der Tangente für die übrigen Merfachen, worauf allein ein Erweis der Unendlichkeit der Reihe, den Bogen aus seiner Tangente zu finden, gegründet werden kann. — Wie bei einem Rez. oder Mathemat. dann noch ein Gedanke, "daß mein Verfaren wenigstens mittelbar auf jene Methode der DifferenzialRechnung rekurriren müsse", entstehen könne, leuchtet bei folgendem so leichten und schlichten Erweiße wol niemanden ein.

Erweis.

Es ist nach oben

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin\alpha^3$$
$$\sin 5\alpha = 5\sin\alpha - 4.5\sin\alpha^3 + 4.4\sin\alpha^5$$
$$\sin 7\alpha = 7\sin\alpha - 7.8\sin\alpha^3 + 7.4.4\sin\alpha^5 - 8.8\sin\alpha^7$$

u. s. w.

Weil aber des 3, 5, oder 7fachen oder allgemein des $(2n+1)$fachen oder des $(2\infty+1)$fachen Bogens Sinus nur in einer Reihe der von 1 bis 3, 5, 7 oder $(2n+1)$ oder $(2\infty+1)$ nach einander folgenden ungeraden Potenzen des ersten Bogens Sinus analütisch bestimmbar ist; so

kann

kann nach geschehener Substitution der 3, 5, 7fache, oder (2n + 1)fache Bogen, — oder da n irgend einen noch so großen Wert ins Unendliche annemen, mithin auch = ∞ werden kann, — der (2 ∞ + 1)fache Bogen auch nur in einer, in Hinsicht der PotenzenFolge des einfachen Bogens Sinus oder der EksponentialDifferenz gleichen Reihe von ungeraden Potenzen desselben Sinus analütisch bestimmbar seün: Oder nach geschehener Substitution muß die Funktion für den 3; den 5; den 7fachen; oder für den (2n + 1)fachen; oder (2 ∞ + 1)fachen Bogen, die 1te und 3te; 1. 3. und 5te; 1. 3. 5. und 7te; 1. 3. 5. 7. bis (2n — 1)te, (2n + 1)te Potenz; oder 1. 3. 5. 7te (2n — 1)te (2n + 1)te bis (2 ∞ — 1)te, (2 ∞ + 1)te Potenz des einfachen Bogens Sinus enthalten, oder sie müssen in Einer Reihe als Faktoren darin vorkommen, weil der jedem Bogen rücksichtlich zugehörige Sinus in der Funktion für den Bogen wenigstens als Faktor darin vorkommen muß.

Dieserwegen kann und muß die Funktion des (2n + 1)fachen und somit des (2 ∞ + 1)fachen Bogens selbst nur in einer solchen Folge der ungeraden von 1 bis (2n + 1) oder (2 ∞ + 1) fortlaufenden Potenzen des einfachen Bogens Sinus bestehen, oder sie muß eine ins Unendliche nach der Differenz zwei fortschreitende Folge der ungeraden Potenzen des einfachen Bogens Sinus seün.

Ist aber der (2n + 1) oder der (2 ∞ + 1)fache Bogen nur in einer unendlichen PotenzenReihe durch des einfachen Bogens Sinus gegeben; so muß und kann notwendig der einfache 2, 3, 4, 5 u. s. w. n oder ∞fache Bogen, als der $\frac{1}{(2n+1)}$, $\frac{2}{(2n+1)}$, $\frac{3}{(2n+1)}$, $\frac{4}{(2n+1)}$, $\frac{5}{(2n+1)}$ oder $\frac{n}{(2n+1)}$ oder $\frac{\infty}{(2n+1)}$ oder als der $\frac{1}{(2\infty+1)}$, $\frac{2}{(2\infty+1)}$, $\frac{3}{(8\infty+1)}$, $\frac{4}{(2\infty+1)}$, $\frac{5}{(2\infty+1)}$, $\frac{n}{(2\infty+1)}$ u. s. w. Theil davon und somit jeder Bogen durch seinen Sinus auch nur in einer ewig unendlichen Reihe (von gleicher Folge der Potenzen des Sinus nach der Differenz 2) oder in einer absoluten Annäherung ins Unendliche bestimmbar und meßbar seün. —

Folg=

Folglich ist ein jeder Bogen aus seinem Sinus nur in einer unendlichen Reihe oder Annäherung gegeben. — Was zu erweißen war.

Diese Reihe ist also jetzt in Hinsicht des Potenzen-Gesetzes genau bestimmt und abgeleitet, und muß hierin der für den $\sin n\alpha$ oder $\sin \frac{1}{n}\alpha$ aus dem $\sin \alpha$ zu finden ähnlich und gleich seün; nur in Hinsicht des Gesetzes der Koefficienten gänzlich ungleich und verschieden davon: denn wäre sie auch hierin dieser gleich, so hörte sie ja auf das zu seün, was sie seün soll, nämlich ein Ausdruck für den Bogen durch seinen Sinus. — Auch dies konnte ein Erl. Rez. bezweifeln.

2. Erweis, die Reihe, den Bogen aus der Tangente zu finden, betreffend.

Wenn und inwiefern ein Bogen oder Winkel durch seine Tangente in einer Funktion meßbar seü; so und insofern muß auch jeder andere Bogen, folglich auch der 2 oder 3fache u. s. w. Bogen durch seine ihm gehörige Tangente rücksichtlich in gleicher Form meßbar seün. Es ist aber des 2 oder 3fachen Bogens Tangente durch des einfachen Bogens Tangente jegliche in einem Bruche gegeben, wo jeder der beiden Ausdrücke sich in eine unendliche Reihe durch unbegränzt fortgesetztes Dividiren verwandelt. Dies macht, daß dann der 2 oder 3fache Bogen durch des einfachen Bogens Tangente auf eine doppelte Weise gegeben oder meßbar ist. Ein Mal: weil jeglicher Bogen ein bestimmtes Vielfaches, nämlich ein 2 oder 3faches des einfachen Bogens ist, und da dieser durch die seinige meßbar angenommen wurde, sie, die 2 oder 3fachen, es dann durch diese Tangente also auch seün müssen. — Zweitens: Weil die Tangente des 2 oder 3fachen Bogens durch des einfachen Bogens Tangente und zwar in einer unendlichen Reihe bestimmbar ist: nämlich

$$\text{tang } 2\alpha = 2\,\text{tang}\,\alpha + 2\,\text{tang}\,\alpha^3 + 2\,\text{tang}\,\alpha^5 + 2\,\text{tang}\,\alpha^7$$
u. s. w.

$$\text{tang } 3\alpha = (3\,\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\alpha^3)\,(1 + 3\,\text{tang}\,\alpha^2 + 3^2\,\text{tang}\,\alpha^4 + 3^3\,\text{tang}\,\alpha^6 + 3^4\,\text{tang}\,\alpha^8 \text{ u. s. w.})$$

Und weil man diese analütischen Ausdrücke oder Werte der Tangenten des 2 oder 3fachen Bogens ihnen substituiren kann.

der Summe der beiden Fakten, aus dem Sinus des einen Bogens multiplicirt in den Kosinus des andern Bogens, dividirt durch das Faktum aus den beiden Radien, wozu sie gehören.

Mithin ist in der zweiten Figur $\frac{\sin(\omega+\gamma)}{\text{rad}\,\omega} = \frac{\sin\omega}{\text{rad}\,\omega} \cdot \frac{\cos\gamma}{\text{rad}\,\gamma} + \frac{\cos\omega\ \sin\gamma}{\text{rad}\,\omega\ \text{rad}\,\gamma}$

2) Den $\cos(\alpha+\beta) = \cos\omega$ zu finden.

Es ist $\cos(\alpha+\beta) = CF = Cf - fF = Cf - Gg =$ $z - w$, $\text{rad}\,\beta : \cos\alpha = \cos\beta : z$ also $z = \cos\alpha \frac{\cos\beta}{\text{rad}\,\beta}$ und $\text{rad}\,\beta : \sin\alpha = \sin\beta : w$ also $w = \sin\alpha \frac{\sin\beta}{\text{rad}\,\beta}$ Mithin $z - w = \frac{\cos\alpha\ \cos\beta}{\text{rad}\,\beta} - \frac{\sin\alpha\ \sin\beta}{\text{rad}\,\beta}$; $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \frac{\cos\beta}{\text{rad}\,\beta} - \sin\alpha \frac{\sin\beta}{\text{rad}\,\beta}$ Oder $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\text{rad}\,\alpha} = \frac{\cos\alpha\ \cos\beta}{\cos\alpha\ \text{rad}\,\beta} - \frac{\sin\alpha\ \sin\beta}{\text{rad}\,\alpha\ \text{rad}\,\beta}$ Mithin in der zweiten Figur $\frac{\cos(\omega+\gamma)}{\text{rad}\,\omega} = \frac{\cos\omega\ \cos\gamma}{\text{rad}\,\omega\ \text{rad}\,\gamma} - \frac{\sin\omega\ \sin\gamma}{\text{rad}\,\omega\ \text{rad}\,\gamma}$

3) Wird nun $\omega = \alpha+\beta$ so ist

$\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\text{rad}\,\alpha} = \frac{\cos(\alpha+\beta)\ \cos\gamma}{\text{rad}\,\alpha\ \text{rad}\,\gamma} + \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\text{rad}\,\alpha} \cdot \frac{\sin\gamma}{\text{rad}\,\gamma}$; $\frac{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\text{rad}\,\alpha} = \frac{\cos(\alpha+\beta)\ \cos\gamma}{\text{rad}\,\alpha\ \text{rad}\,\gamma} - \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\text{rad}\,\alpha} \cdot \frac{\sin\gamma}{\text{rad}\,\gamma}$

Und da $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\text{rad}\,\alpha} = \frac{\sin\alpha\ \cos\beta}{\text{rad}\,\alpha\ \text{rad}\,\beta} + \frac{\sin\beta\ \cos\alpha}{\text{rad}\,\beta\ \text{rad}\,\alpha}$ auch $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\text{rad}\,\alpha} = \frac{\cos\alpha\ \cos\beta}{\text{rad}\,\alpha\ \text{rad}\,\beta} - \frac{\sin\alpha\ \sin\beta}{\text{rad}\,\alpha\ \text{rad}\,\beta}$. So ist, diese Werthe in die vorige Gleichungen statt gesetzt.

$\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\text{rad}\,\alpha} = \frac{\sin\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma}{\text{rad}\,\alpha\ \text{rad}\,\beta\ \text{rad}\,\gamma} + \frac{\cos\alpha\ \sin\beta}{\text{rad}\,\alpha\ \text{rad}\,\beta} \cdot \cos\gamma$

$$\frac{\cos\gamma}{\text{rad}\,\gamma} + \frac{\cos\alpha\,\cos\beta\,\sin\gamma}{\text{rad}\,\alpha\,\text{rad}\,\beta\,\text{rad}\,\gamma} - \frac{\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma}{\text{rad}\,\alpha\,\text{rad}\,\beta\,\text{rad}\,\gamma};$$

$$\frac{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\text{rad}\,\alpha} = \frac{\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma}{\text{rad}\,\alpha\,\text{rad}\,\beta\,\text{rad}\,\gamma} - \frac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\text{rad}\,\alpha\,\text{rad}\,\beta}\cdot$$

$$\frac{\cos\gamma}{\text{rad}\,\gamma} - \frac{\sin\alpha\,\cos\beta\,\sin\gamma}{\text{rad}\,\alpha\,\text{rad}\,\beta\,\text{rad}\,\gamma} - \frac{\cos\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma}{\text{rad}\,\alpha\,\text{rad}\,\beta\,\text{rad}\,\gamma}.$$

Folglich gelten dieſe Ausdrücke auch von jeden andern drei Bögen δ, ε, ζ und dann iſt.

$$\frac{\sin(\delta+\varepsilon+\zeta}{\text{rad}\,\delta} = \frac{\sin\delta\,\cos\varepsilon\,\cos\zeta}{\text{rad}\,\delta\,\text{rad}\,\varepsilon\,\text{rad}\,\zeta} + \frac{\cos\delta\,\sin\varepsilon\,\cos\zeta}{\text{rad}\,\delta\,\text{rad}\,\varepsilon\,\text{rad}\,\zeta}$$

$$+ \frac{\cos\delta\,\cos\varepsilon\,\sin\zeta}{\text{rad}\,\delta\,\text{rad}\,\varepsilon\,\text{rad}\,\zeta} - \frac{\sin\delta\,\sin\varepsilon\,\sin\zeta}{\text{rad}\,\delta\,\text{rad}\,\varepsilon\,\text{rad}\,\zeta}$$

$$\frac{\cos(\delta+\varepsilon+\zeta)}{\text{rad}\,\delta} = \frac{\cos\delta\,\cos\varepsilon\,\cos\zeta}{\text{rad}\,\delta\,\text{rad}\,\varepsilon\,\text{rad}\,\zeta} - \frac{\sin\delta\,\sin\varepsilon}{\text{rad}\,\delta\,\text{rad}\,\varepsilon}\cdot$$

$$\frac{\cos\zeta}{\text{rad}\,\zeta} - \frac{\sin\delta\,\cos\varepsilon\,\sin\zeta}{\text{rad}\,\delta\,\text{rad}\,\varepsilon\,\text{rad}\,\zeta} - \frac{\cos\delta\,\sin\varepsilon\,\sin\zeta}{\text{rad}\,\delta\,\text{rad}\,\varepsilon\,\text{rad}\,\zeta}$$

4) Iſt $\zeta = \alpha+\beta$ und ε wird zu γ ſo iſt auch

$$\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{\text{rad}\,\alpha} = \frac{\sin\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma\,\cos\delta}{\text{rad}\,\alpha\,\text{rad}\,\beta\,\text{rad}\,\gamma\,\text{rad}\,\delta} + \frac{\cos\alpha}{\text{rad}\,\alpha}\cdot$$

$$\frac{\sin\beta\,\cos\gamma\,\cos\delta}{\text{rad}\,\beta\,\text{rad}\,\gamma\,\text{rad}\,\delta} + \frac{\cos\alpha\,\cos\beta\,\sin\gamma\,\cos\delta}{\text{rad}\,\alpha\,\text{rad}\,\beta\,\text{rad}\,\gamma\,\text{rad}\,\delta} + \frac{\cos\alpha}{\text{rad}\,\alpha}\cdot$$

$$\frac{\cos\beta\,\cos\gamma\,\sin\delta}{\text{rad}\,\beta\,\text{rad}\,\gamma\,\text{rad}\,\delta} - \frac{\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma\,\cos\delta}{\text{rad}\,\mu\,\text{rad}\,\beta\,\text{rad}\,\gamma\,\text{rad}\,\delta} - \frac{\sin\alpha}{\text{rad}\,\alpha}\cdot$$

$$\frac{\sin\beta\,\cos\gamma\,\sin\delta}{\text{rad}\,\beta\,\text{rad}\,\gamma\,\text{rad}\,\delta} - \frac{\sin\alpha\,\cos\beta\,\sin\gamma\,\sin\delta}{\text{rad}\,\alpha\,\text{rad}\,\beta\,\text{rad}\,\gamma\,\text{rad}\,\delta} - \frac{\cos\alpha}{\text{rad}\,\alpha}\cdot$$

$$\frac{\sin\beta\,\sin\gamma\,\sin\delta}{\text{rad}\,\beta\,\text{rad}\,\gamma\,\text{rad}\,\delta}; \quad \frac{\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{\text{rad}\,\alpha} = (\text{rad}\,\alpha\,\text{rad}\,\beta\,\text{rad}\,\gamma\,\text{rad}\,\delta)^{-1}\,(\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma\,\cos\delta + \sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma\,\sin\delta - \cos\alpha\,\cos\beta\,\sin\gamma\,\sin\delta - \sin\alpha\,\sin\beta\,\cos\gamma\,\cos\delta - \cos\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma\,\cos\delta - \sin\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma\,\sin\delta - \cos\alpha\,\sin\beta\,\cos\gamma\,\sin\delta - \sin\alpha\,\cos\beta\,\sin\delta\,\cos\varepsilon)$$

5) Iſt $\zeta = \alpha+\beta+\gamma$ in den Ausdrücken für sin und cos von $\delta+\varepsilon+\zeta$, ſo ergiebt ſich

$$\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)}{\text{rad}\,\alpha} = (\text{rad}\,\alpha\,\text{rad}\,\beta\,\text{rad}\,\gamma\,\text{rad}\,\delta\,\text{rad}\,\varepsilon)^{-1}\,(\sin\alpha\,.\,\sin\beta\,.\,\sin\gamma\,.\,\sin\delta\,.\,\sin\varepsilon + \sin\alpha\,.\,\cos\beta\,.\,\cos\gamma\,.\,\cos\delta\,.\,\cos\varepsilon + \cos\alpha\,.$$

$\cos\alpha . \cos\beta . \sin\gamma . \cos\delta . \cos\varepsilon + \cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma . \sin\delta . \cos\varepsilon + \cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma . \cos\delta . \sin\varepsilon - \sin\alpha . \sin\beta . \sin\gamma . \cos\delta . \cos\varepsilon - \sin\alpha . \sin\beta . \cos\gamma . \sin\delta . \cos\varepsilon - \sin\alpha . \sin\beta . \cos\gamma . \cos\delta . \sin\varepsilon - \sin\alpha \cos\beta . \sin\gamma . \sin\delta . \cos\varepsilon - \sin\alpha . \cos\beta . \sin\gamma . \cos\delta . \sin\varepsilon - \sin\alpha . \cos\beta . \cos\gamma . \sin\delta . \cos\varepsilon - \cos\alpha . \sin\beta . \sin\gamma . \sin\delta . \cos\varepsilon - \cos\alpha . \sin\beta . \sin\gamma . \cos\delta . \sin\varepsilon - \cos\alpha . \sin\beta . \cos\gamma . \sin\delta . \sin\varepsilon - \cos\alpha . \cos\beta . \sin\gamma . \sin\delta . \sin\varepsilon)$

$$\frac{\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)}{\text{rad}\,\alpha} = (\text{rad}\,\alpha\ \text{rad}\,\beta\ \text{rad}\,\gamma\ \text{rad}\,\delta\ \text{rad}\,\varepsilon)^{-1}(\cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma . \cos\delta . \cos\varepsilon - \cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma . \sin\delta . \sin\varepsilon - \cos\alpha . \cos\beta . \sin\gamma . \cos\delta . \sin\varepsilon - \cos\alpha . \cos\beta . \sin\gamma . \sin\delta . \cos\varepsilon - \cos\alpha . \sin\beta . \cos\gamma . \cos\delta . \sin\varepsilon - \cos\alpha . \sin\beta . \cos\gamma . \sin\delta . \cos\varepsilon - \cos\alpha . \sin\beta . \sin\gamma . \cos\delta . \cos\varepsilon - \sin\alpha . \cos\beta . \cos\gamma . \cos\delta . \cos\varepsilon + \cos\alpha . \sin\beta . \sin\gamma . \sin\delta . \sin\varepsilon + \sin\alpha . \cos\beta . \sin\gamma . \sin\delta . \sin\varepsilon + \sin\alpha . \sin\beta . \cos\gamma . \sin\delta . \sin\varepsilon + \sin\alpha . \sin\beta . \sin\gamma . \cos\delta . \sin\varepsilon + \sin\alpha . \sin\beta . \sin\gamma . \sin\delta . \cos\varepsilon)$$

6) Wenn man $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon$ in 2, 3, 4, 5 setzt und dann bedenkt, daß dann $\frac{\sin\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = \frac{\sin\beta}{\text{rad}\,\beta} = \frac{\sin\gamma}{\text{rad}\,\gamma} = \frac{\sin\delta}{\text{rad}\,\delta} = \frac{\sin\varepsilon}{\text{rad}\,\varepsilon}$ auch $\frac{\cos\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = \frac{\cos\beta}{\text{rad}\,\beta} = \frac{\cos\gamma}{\text{rad}\,\gamma} = \frac{\cos\delta}{\text{rad}\,\delta} = \frac{\cos\varepsilon}{\text{rad}\,\varepsilon}$ ist. So ergeben sich die Ausdrücke für Sinus und Kosinus von 2α, 3α, 4α, 5α oder 2β, 3β, 4β, 5β; oder 2γ, 3γ, 4γ, 5γ und dergleichen aus dem Sinus und Kosinus des einfachen Bogens zu finden.

$$\frac{\sin 2\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = 2\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha}{\text{rad}\,\alpha^2} \quad \text{oder} \quad \sin 2\beta = 2\frac{\sin\beta\ \cos\beta}{\text{rad}\,\beta^2}$$

$$\frac{\cos 2\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = \frac{\cos\alpha^2}{\text{rad}\,\alpha^2} - \frac{\sin\alpha^2}{\text{rad}\,\alpha^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\cos 2\beta}{\text{rad}\,\beta} = \frac{\cos\beta^2}{\text{rad}\,\beta^2} - \frac{\sin\beta^2}{\text{rad}\,\beta^2};$$

$$\frac{\sin 3\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = 3\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha^2}{\text{rad}\,\alpha^3} - \frac{\sin\alpha^3}{\text{rod}\,\alpha^3};\quad \frac{\cos 3\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = \frac{\cos\alpha^3}{\text{rad}\,\alpha} - 3\frac{\cos\alpha\ \sin\alpha^2}{\text{rad}\,\alpha^3} -$$

$\sin 4\alpha$

$$\frac{\sin 4\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = 4\frac{\sin\alpha\,\cos\alpha^3}{\text{rad}\,\alpha^4} - 4\frac{\sin\alpha^3\,\cos\alpha}{\text{rad}\,\alpha^4}; \quad \frac{\cos 4\alpha}{\text{rad}\,\alpha}$$

$$= \frac{\cos\alpha^4}{\text{rad}\,\alpha^4} - 6\frac{\cos\alpha^2\,\sin\alpha^2}{\text{rad}\,\alpha^4} + \frac{\sin\alpha^4}{\text{rad}\,\alpha^4}; \quad \frac{\sin 5\alpha}{\text{rad}\,\alpha} =$$

$$5\frac{\sin\alpha\,\cos\alpha^4}{\text{rad}\,\alpha^5} - 2.5\frac{\sin\alpha^3\,\cos\alpha^2}{\text{rad}\,\alpha^5} + \frac{\sin\alpha^5}{\text{rad}\,\alpha^5}; \quad \frac{\cos 5\alpha}{\text{rad}\,\alpha}$$

$$= \frac{\cos\alpha^5}{\text{rad}\,\alpha^5} - 2.5\frac{\cos\alpha^3\,\sin\alpha^2}{\text{rad}\,\alpha^5} + 5\frac{\cos\alpha\,\sin\alpha^4}{\text{rad}\,\alpha^5};$$

$$\frac{\sin 6\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = 6\frac{\sin\alpha\,\cos\alpha^5}{\text{rad}\,\alpha^6} - 4.5\frac{\sin\alpha^3\,\cos\alpha^3}{\text{rad}\,\alpha^6} +$$

$$6\frac{\sin\alpha^5\,\cos\alpha}{\text{rad}\,\alpha^6}; \quad \frac{\cos 6\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = \frac{\cos\alpha^6}{\text{rad}\,\alpha^6} - 3.5\frac{\cos\alpha^4\,\sin\alpha^2}{\text{rad}\,\alpha^6}$$

$$+ 3.5\frac{\cos\alpha^2\,\sin\alpha^4}{\text{rad}\,\alpha^6} - \frac{\sin\alpha^6}{\text{rad}\,\alpha^6}; \quad \frac{\sin 7\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = 7\frac{\sin\alpha}{\text{rad}\,\alpha};$$

$$\frac{\cos\alpha^6}{\text{rad}\,\alpha^6} - 5.7\frac{\sin\alpha^3\,\cos\alpha^4}{\text{rad}\,\alpha^7} + 3.7\frac{\sin\alpha^5\,\cos\alpha^2}{\text{rad}\,\alpha^7} -$$

$$\frac{\sin\alpha^7}{\text{rad}\,\alpha^3}; \quad \frac{\cos 7\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = (\cos\alpha^7 - 3.7\cos\alpha^5\,\sin\alpha^2 +$$

$$5.7.\cos\alpha^3\,\sin\alpha^4 - 7\cos\alpha\,\sin\alpha^6)\,\text{rad}\,\alpha^{-7}$$

$$\sin 8\alpha\,\text{rad}\,\alpha^{-1} = (8\sin\alpha\,\cos\alpha^7 - 7.8\sin\alpha^3\,\cos\alpha^5 +$$

$$7.8\sin\alpha^5\,\cos\alpha^3 - 8\sin\alpha^7\,\cos\alpha)\,\text{rad}\,\alpha^{-8}$$

$$\frac{\cos 8\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = (\cos\alpha^8 - 4.7\cos\alpha^6\,\sin\alpha^2 + 2.5.7\cos\alpha^4$$

$$\sin\alpha^4 - 4.7.\cos\alpha^2\,\sin\alpha^6 + \sin\alpha^8)\,\text{rad}\,\alpha^{-8}$$

$$\frac{\sin 9\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = (9\sin\alpha\,\cos\alpha^8 - 3.4.7\sin\alpha^3\,\cos\alpha^6 +$$

$$2.7.9\sin\alpha^5\,\cos\alpha^4 - 4.9.\sin\alpha^7.\cos\alpha^2 + \sin\alpha^9)\,\text{rad}\,\alpha^{-9}$$

$$\frac{\cos 9\alpha}{\text{rad}\,\alpha} = (\cos\alpha^9 - 4.9.\cos\alpha^7\,\sin\alpha^2 + 2.7.9\cos\alpha^5$$

$$\sin\alpha^4 - 3.4.7\cos\alpha^3.\sin\alpha^6 + 9\cos\alpha\,\sin\alpha^8)\,\text{rad}\,\alpha^{-9}$$

u. ſ. w.

7) Da $\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,\text{rad}\,\alpha$ oder $\frac{\text{tang}\,\omega}{\text{rad}\,\omega} = \frac{\sin\omega}{\cos\omega}$

und $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\text{corad}\,\alpha$ oder $\frac{\cot\omega}{\text{corad}\,\omega} = \frac{\cos\omega}{\sin\omega}$ ſo laſſen ſich aus den letzten Ausdrücken die Formeln, die Tangen-

gen-

genten und Cotangenten von 2α, 3α, 4α, 5α, 6α, 7α, 9α u. s. w. aus der Tangente oder Cotangente des einfachen Bogens zu finden, entwickeln

$$\frac{\text{tang } 2\alpha}{\text{rad } \alpha} = \frac{2 \text{ tang } \alpha \cdot \text{rad } \alpha}{\text{rad } \alpha^2 - \text{tang } \alpha^2}; \quad \frac{\text{tang } 3\alpha}{\text{rad } \alpha} =$$

$$\frac{3 \text{ rad } \alpha^2 \text{ tang } \alpha - \text{tang } \alpha^3}{\text{rad } \alpha^3 - 3 \text{ rad tang } \alpha}$$

$$\frac{\text{tang } 4\alpha}{\text{rad } \alpha} = \frac{4 \text{ tang } \alpha \text{ rad } \alpha^3 - 4 \text{tang } \alpha^3 \text{ rad } \alpha}{\text{rad } \alpha^4 - 6 \text{ rad } \alpha^2 \text{ tang } \alpha^2 + \text{tang } \alpha^4}; \quad \frac{\text{tang } 5\alpha}{\text{rad } \alpha} =$$

$$\frac{5 \text{ tang } \alpha \text{ rad } \alpha^4 - 2.5 \text{tang } \alpha^3 \text{ rad } \alpha^2 + \text{tang } \alpha^5}{\text{rad } \alpha^5 - 2.5 \text{ rad } \alpha^3 \text{ tang } \alpha^2 + 5 \text{ rad } \alpha \text{ tang } \alpha^4}; \quad \frac{\text{tang } 6\alpha}{\text{rad } \alpha} =$$

$$\frac{6 \text{ tang } \alpha \text{ rad } \alpha^5 - 4.5 \text{ tang } \alpha^3 \text{ rad } \alpha^3 + 6 \text{ tang } \alpha^5 \text{ rad } \alpha}{\text{rad } \alpha^6 - 3.5 \text{rad } \alpha^4 \text{ tang } \alpha^2 + 3.5 \text{ rad } \alpha^2 \text{ tang } \alpha^4 - \text{tang } \alpha^6}$$

$$\text{tang } 7\alpha$$

$$\frac{\text{rad } \alpha}{} =$$

$$\frac{7 \text{tang } \alpha \text{ rad } \alpha^6 - 5.7 \text{tang } \alpha^3 \text{ rad } \alpha^4 + 3.7 \text{tg } \alpha^5 \text{ rad } \alpha^2 - \text{tg } \alpha^7}{\text{rad } \alpha^7 - 3.7 \text{rad } \alpha^5 \text{ tang } \alpha^2 + 7.5 \text{rad } \alpha^3 \text{ tg } \alpha^4 - 7 \text{tg } \alpha^6 \text{ rad } \alpha}$$

$\text{tang } 8\alpha \text{ rad } \alpha^{-1} = [8 \text{ rad } \alpha^7 \text{ tang } \alpha - 7.8 \text{ rad } \alpha^5 \text{ tang } \alpha^3 + 7.8 \text{ tang } \alpha^5 \text{ rad } \alpha^3 - 8 \text{ tang } \alpha^7 \text{ rad } \alpha] (\text{rad } \alpha^8 - 4.7 \text{ rad } \alpha^6 \text{ tang } \alpha^2 + 2.5.7 \text{ rad } \alpha^4 \text{ tang } \alpha^4 - 4.7 \text{ rad } \alpha^2 \text{ tang } \alpha^6 + \text{tang } \alpha^8)^{-1}$ u. s. w. u. s. w.

$$\frac{\cot 2\alpha}{\text{rad } \alpha} = \frac{\cot \alpha^2 - \text{cor } \alpha^2}{2 \cot \alpha \cdot \text{cor } \alpha}; \quad \frac{\cot 3\alpha}{\text{cor } \alpha} =$$

$$\frac{\cot \alpha^3 - 6 \cot \alpha \text{ cor} \alpha^2}{3 \cot \alpha^2 \text{ cor } \alpha - \text{cor } \alpha^3}$$; hier bedeutet $\text{cor } \alpha$ den Kosradius von α, welcher auf den Radius von α senkrecht aufsteht.

$$\frac{\cot 4\alpha}{\text{rad } \alpha} = \frac{\cot \alpha^4 - 6 \cot \alpha^2 \text{ cor } \alpha^2 + \text{cor } \alpha^4}{4 \cot \alpha^3 \text{ cor } \alpha - 4 \cot \alpha \text{ cor } \alpha^3}; \quad \frac{\cot 5\alpha}{\text{cor } \alpha} =$$

$$\frac{\cot \alpha^5 - 2.5 \cot \alpha^3 . \text{cor } \alpha^2 + 5 \cot \alpha . \text{cor } \alpha^4}{5 \cot \alpha^4 \text{ cor } \alpha - 2.5 \cot \alpha^2 \text{ cor } \alpha^3 + \text{cor } \alpha^5}; \quad \frac{\cot 6\alpha}{\text{cor } \alpha} =$$

$$\frac{\cot \alpha^6 - 2.5 \cot \alpha^4 \text{ cor } \alpha^2 + 2.5 \cot \alpha^2 \text{ cor } \alpha^4 - \text{cor } \alpha^6}{6 \text{ cor } 6\alpha \cot \alpha^5 - 4.5 \cot \alpha^3 . \text{cor } \alpha^3 + 6 \cot \alpha \text{ cor } \alpha^5};$$

$$\frac{\cot 7\alpha}{\text{cor } \alpha} =$$

$$\frac{\cot \alpha^7 - 3.7 . \cot \alpha^5 \text{ cor } \alpha^2 + 5.7 \cot \alpha^3 \text{ cor } \alpha^4 - 7 \cot \alpha \text{ cor} \alpha^6}{7 \cot \alpha^6 \text{ cor } \alpha - 5.7 \cot \alpha^4 \text{ cor } \alpha^3 + 3.7 \cot \alpha^2 \text{ cor } \alpha^5 - \text{cor } \alpha^7}$$

$\cot 8\alpha$

$$\frac{\cot 8\alpha}{\operatorname{cor}\alpha} = (\cot\alpha^8 - 4.7\cot\alpha^6.\operatorname{cor}\alpha^2 + 2.5.7\cot\alpha^4$$
$$\operatorname{cor}\alpha^4 - 4.7.\cot\alpha^2.\operatorname{cor}\alpha^6 + \operatorname{cor}\alpha^8)\ (8\cot\alpha^7\operatorname{cor}\alpha -$$
$$7.8\cot\alpha^5\operatorname{cor}\alpha^3 + 7.8\cot\alpha^3\operatorname{cor}\alpha^5 - 8\cot\alpha.\operatorname{cor}\alpha^7) - 1$$

8) Das, jeglicher Kurve und jeglichem Kreiße eigenthümliche Verhältnis des Sinus zum Quersinus und umgekert modifizirt für jede Kurve und jeden Kreiß die Formeln in 7 den Sinus des 2= oder nfachen Bogens und so auch den Quersinus des 2 oder nfachen Bogens aus des einfachen Bogens Sinus und rücksichtlich Quersinus allein zu finden.

9) Mit nichten sind mittelst der Formeln in No. 6, 7 und 8 nach den SchlußFolgen A, B und C u. s. w. in obiger Abhandlung die Rektifikationen der Bögen von Kurven und Kreißen aus ihren Koordinaten und umgekert leicht zu bestimmen; diese Formeln sind nämlich nicht richtig. Bekanntlich nemen die Radien in der Ellipse vom Mittel-Punkt z. B. in jedem Viertels-Kreiße derselben vom größten Halbmesser a bis zum kleinsten c immer mer ab, wie die Bogen das Doppelte oder Merfache annemen. Die Radien vom nächsten Brenn-Punkt (Fokus) wachsen zwar wie die Bögen wachsen; doch läßt sich ihre Zuname nur durch die Ordinate des Merfachen Bogens, die an ihm hängt, bestimmen. Auch werden bei gleich großen Bögen die Ordinaten oder Sinuße und die Abszißen immer kleiner als die ersten wie die Radien zunemen und die Winkel kleiner werden, welche die Radien an gleich großen Bogen bilden.

10) Der (Ein- und jeder m-Punkt) Kreis-Lere sogenannter Magister Matheseos, oder Urgrund-Satz der Theorie der Verhältnisse trigonometrischer Linien.

Der Sinus, oder Quersinus, oder die Tangente u. s. w. eines 2, 3, 4, 5, 6, 7 u. s. f. fachen Bogens ist durch den Sinus, oder Quersinus, oder die Tangente des einfachen Bogens allein, in einer analütischen Funktion gegeben. — Den Beweis siehe pag. 11. und ferner meiner rein wissenschaftlichen Deduktion oder Ableitung der wa-

ren Verh. jezw. trig. Lin. u. s. w. Wer jedoch die Warheit, Allgemeinheit und Gültigkeit dieses Satzes leugnet, der bezweifelt und leugnet alle mathematische Gewisheit. — Da im Zirkel vom Zentrum aus alle Radien gleich gros sind, so hat man nur in dem Obigen (6) alle Radien, rad α, rad β, rad γ, u. s. w. einander gleich und $\cos\alpha^2 = \text{rad}\,\alpha^2 - \sin\alpha^2$ zu setzen, und ist sicher von obigem Satze überzeugt.

Urware kurze philosophisch-mathematische Auflösung der GeneralProbleme der berechnenden KreisLere.

Wenn ein WinkelBogen durch seinen Sinus, seinen Quersinus oder seine Tangente meßbar ist; so ist auch hinwiederum der Sinus, Quersinus, die Tangente u. s. w. durch den WinkelBogen meßbar, weil dann bei einer ein Mal angenommenen Relation zwischen zwei Größen, bald die eine, bald die andere als Einheit oder gegebene Größe im wechselseitigen Messen angesehen werden kann (und auch die eine ○ wird, wenn die andere es wird.) — (Bogen und Sinus, als Linien schlechthin, müssen durch einander meßbar seün; als ungleichartige Linien, aber nur in einem transzendenten Verhältnisse, weil nur gleichartige Linien analütisch bestimmbar sind.)

"Soll nun würklich jeder Bogen, durch seinen ihm zugeordneten Sinus u. s. w. und umgekert, gemessen werden können, so muß es jedoch in einem transzendenten Verhältnisse, durch eine transzendente Funktion von der unendlichsten Dimension, folglich in einer unendlichen, sich dem waren Werte im Unendlichen ganz nähernden Reihe geschehen; so muß diese Funktion von der ∞ten Dimension seün (die nach einem Gesetze und nach einer beständigen Differenz fortschreitenden Potenzen der gegebenen Größe, welche zwischen 1 und ∞ fallen, enthalten) und sich nicht durch Erheben zu einer ganzen oder gebrochenen Potenz, oder durch irgend einen KunstGriff aus einer transzendenten in eine algebraische Funktion verwandeln lassen. — Ihr beständiger Karakter ist Unveränderlichkeit und das ewig gleichbleibende Fortschreiten in das Unendliche. Warum? — Weil nur gleichartigen Größen die Möglichkeit der Verwandlung in eine endliche, d. i. algebraische oder analütische Funktion, zukömmt,

zukömmt, und der Viertel-Kreis, als eine ewig krumme Linie, und sein Halbmesser als eine ewig gerade Linie, ganz und gar ungleichartige, d. i. transzendente Größen in gegenseitiger Beziehung sind, die daher auch nur in einem transzendenten Verhältnis mit einander stehen können. [Man möchte hier die Unendlichkeit der Reihe für postulirt halten, weiter unten wird sie jedoch sogleich so scharf, als es möglich ist, erwießen werden.]

A) Wenn und wiefern aber ein Bogen (Winkel) durch seinen Sinus (ob im endlichen oder unendlichen Ausdrucke ist zuvörderst hier jetzt gleichgültig,) meßbar ist; so und in sofern muß auch jeder andere Bogen, folglich auch der 2, 3, 4, 5, 6 u. s. f. fache Bogen rücksichtlich durch seinen ihm zugehörigen Sinus in gleicher Form meßbar seün. Es muß auch in der Funktion, den Bogen aus seinen Sinus zu finden, der Sinus als Faktor in allen möglichen Gliedern vorkommen, weil Bogen und Sinus vom Anfangs-Punkt an zugleich Etwas oder zugleich Null sind und werden.

2) Dann ist aber auch der 2fache, 3fache, 4fache, 5fache, 6fache u. s. w. Bogen durch des einfachen Bogens Sinus meßbar, und zwar auf eine doppelte Weise.

3) Erstlich, weil jeglicher Bogen ein bestimmtes unveränderliches Vielfaches des einfachen Bogens ist, und da dieser durch seinen Sinus meßbar angenommen wurde, sie, die Vielfachen, dann durch diesen es also auch seün müssen. —

4) Zweitens, weil und dies ist höchst merkwürdig, die Sinusse des 2fachen, oder 3, 4, 5, 6 u. s. w. fachen, mithin auch wol des n oder (2n), (2n + 1) . . . (∞ − 1) ∞, (∞ + 1) fachen Bogens durch des einfachen Bogens Sinus bestimmbar sind, und diese analütischen Ausdrücke oder diese ihre Werte ihnen substituirt werden können.

5) Und zwar sind die ungeraden Vielfachen in analütischen Ausdrücken von endlicher Potenzen-Reihe des einfachen Bogens Sinus bestimmbar, wo jegliches Mal diese Reihe mit der 1sten Potenz anfängt und mit der Potenz des aufgegebenen Vielfachen schließt; dagegen die geraden Vielfachen nur in analütischen Ausdrücken von einer ins Unendliche fortlaufenden Reihe aller nach einander von 1 an fortlaufenden ungeraden Potenzen des einfachen Bogens Sinus. (Siehe Dedukt. pag. 16.)

6) Er-

6) Erweis. Weil aber des 2fachen, oder 4fachen, oder 6fachen u. s. w. Bogens Sinus nur in einer bestimmten ins Unendliche fortlaufenden PotenzenReihe von unveränderlich gleicher EksponentenFolge durch des einfachen Bogens Sinus analütisch bestimmbar ist; so kann, nach geschehener Substitution, der 2fache, 4fache, 6fache u. s. w. Bogen auch nur in einer ähnlichen unendlichen Reihe von gleicher Folge der Eksponenten der Potenzen durch des einfachen Bogens Sinus analütisch bestimmbar seün.

$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha (1 - \sin\alpha^2)^{\frac{1}{2}} = 2\sin\alpha - \sin\alpha^3 - \frac{1}{4}\sin\alpha^5 - \frac{1}{8}\sin\alpha^7$ u. s. w.

$\sin 4\alpha = 4\sin\alpha - 2.5\sin\alpha^3 + \frac{7}{2}\sin\alpha^5 - \frac{3}{4}\sin\alpha^7$ u. s. w.

$\sin 6\alpha = 6\sin\alpha - 5.7\sin\alpha^3 + \frac{6.7.9}{2.2.2}\sin\alpha^5 - \frac{9.11}{2.4}\sin\alpha^7$ u. s. w.

7) Ist dies aber der 2fache, 4fache, oder 6fache u. s. w. Bogen; so muß und kann notwendig der einfache Bogen, als das 2tel, 4tel, 6tel u. s. w. davon und somit jeder andere Bogen durch seinen Sinus auch nur in einer ewig unendlichen Reihe (von gleicher Folge der Potenzen des Sinus) oder in einer Annäherung ins Unendliche bestimmbar und meßbar seün. — Folglich ist ein jeder Bogen aus seinem Sinus nur in einer unendlichen Reihe von Gliedern oder in einer Annäherung ins Unendliche gegeben. —

8) Doch man möchte sich an diesem Erweiße der Unendlichkeit der Reihe, wie ein Erl. Rez., stoßen, weil er auf die Anwendung der BinomialFormel auf gebrochene Eksponenten oder IrrationalGrößen, hier den Kosinus durch eine Funktion des Sinus und Halbmessers auszudrücken, sich gründet, und man die Allgemeinheit der Anwendung dieser Formel nur erst mittelst der DifferenzialRechnung beweißen zu können glaubt, da doch umgekert, — gesetzt einmal, die Prämissen dieser Rechnung wären richtig, und man wollte ihr einigen Anspruch auf Warheit und Gültigkeit einiger Sätze zugestehen, — dieser Beweis der BinomialFormel vorher one sie streng wissenschaftlich gefürt seün muß und ser füglich gefürt werden kann. —

Auch verschwindet onedies sogleich die Irrationalität der Ausdrücke für jeden $\sin 2n\alpha$ aus den $\sin\alpha$ zu finden,

wenn

wenn man diese Ausdrücke oder Funktionen in die 2te oder in jede gerade Potenz erhebt und jeglicher Ausdruck für $\sin 2n\alpha$ wie für $\sin(2n+1)\alpha$ wird zu einem endlichen analütischen Ausdruck, der mit der Potenz 2 anfängt und rücksichtlich mit der Potenz $4n$ oder $4n+2$ schließt. Und die Unendlichkeit der Reihe, für den Bogen aus seinem Sinus und umgekert zu finden, darf eben, weil sie heterogene und transzendente Größen sind, durch kein Potenziren aufgehoben werden.

Ich liefere daher folgenden einzig möglichen und strensten Erweis der Unendlichkeit der Reihe, welcher auch von irgend einer Potenz des Bogens gilt.

9) Weil in den Ausdrücken oder Funktionen, aus der Tangente des einfachen Bogens die Tangente des 2, 3, 4, u. s. w. oder des merfachen Bogens zu finden, gar keine Anwendung der BinomialFormel auf IrrationalGrößen eintreten kann, da deren darin keine vorhanden sind, so ließe sich ein Erweiß der Unendlichkeit jener Reihe, den Bogen aus seiner Tangente zu finden, auch hierauf gar nicht gründen. Durch ein bloßes ins Unendliche fortgesetztes Dividiren ergiebt sich die Unendlichkeit der Reihe, die Tangente des 2fachen Bogens aus der des einfachen zu finden, und so in den Ausdrücken der Tangente für die übrigen Merfachen, worauf allein ein Erweis der Unendlichkeit der Reihe, den Bogen aus seiner Tangente zu finden, gegründet werden kann. — Wie bei einem Rez. oder Mathemat. dann noch ein Gedanke, "daß mein Verfaren wenigstens mittelbar auf jene Methode der DifferenzialRechnung rekurriren müsse", entstehen könne, leuchtet bei folgendem so leichten und schlichten Erweiße wol niemanden ein.

Erweis.

Es ist nach oben

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin\alpha^3$$
$$\sin 5\alpha = 5\sin\alpha - 4.5\sin\alpha^3 + 4.4\sin\alpha^5$$
$$\sin 7\alpha = 7\sin\alpha - 7.8\sin\alpha^3 + 7.4.4\sin\alpha^5 - 8.8\sin\alpha^7$$

u. s. w.

Weil aber des 3, 5, oder 7fachen oder allgemein des $(2n+1)$fachen oder des $(2\infty+1)$fachen Bogens Sinus nur in einer Reihe der von 1 bis 3, 5, 7 oder $(2n+1)$ oder $(2\infty+1)$ nach einander folgenden ungeraden Potenzen des ersten Bogens Sinus analütisch bestimmbar ist; so

kann

kann nach geschehener Substitution der 3, 5, 7fache, oder (2n + 1)fache Bogen, — oder da n irgend einen noch so großen Wert ins Unendliche annemen, mithin auch $= \infty$ werden kann, — der (2 ∞ + 1)fache Bogen auch nur in einer, in Hinsicht der PotenzenFolge des einfachen Bogens Sinus oder der EksponentialDifferenz gleichen Reihe von ungeraden Potenzen desselben Sinus analütisch bestimmbar seün: Oder nach geschehener Substitution muß die Funktion für den 3; den 5; den 7fachen; oder für den (2n + 1)fachen; oder (2 ∞ + 1)fachen Bogen, die 1te und 3te; 1. 3. und 5te; 1. 3. 5. und 7te; 1. 3. 5. 7. bis (2n — 1)te, (2n + 1)te Potenz; oder 1. 3. 5. 7te (2n — 1)te (2n + 1)te bis (2 ∞ — 1)te, (2 ∞ + 1)te Potenz des einfachen Bogens Sinus enthalten, oder sie müssen in Einer Reihe als Faktoren darin vorkommen, weil der jedem Bogen rücksichtlich zugehörige Sinus in der Funktion für den Bogen wenigstens als Faktor darin vorkommen muß.

Dieserwegen kann und muß die Funktion des (2n + 1)fachen und somit des (2 ∞ + 1)fachen Bogens selbst nur in einer solchen Folge der ungeraden von 1 bis (2n + 1) oder (2 ∞ + 1) fortlaufenden Potenzen des einfachen Bogens Sinus bestehen, oder sie muß eine ins Unendliche nach der Differenz zwei fortschreitende Folge der ungeraden Potenzen des einfachen Bogens Sinus seün.

Ist aber der (2n + 1) oder der (2 ∞ + 1)fache Bogen nur in einer unendlichen PotenzenReihe durch des einfachen Bogens Sinus gegeben; so muß und kann notwendig der einfache 2, 3, 4, 5 u. s. w. n oder ∞fache Bogen, als der $\frac{1}{(2n+1)}$, $\frac{2}{(2n+1)}$, $\frac{3}{(2n+1)}$, $\frac{4}{(2n+1)}$, $\frac{5}{(2n+1)}$ oder $\frac{n}{(2n+1)}$ oder $\frac{\infty}{(2n+1)}$ oder als der $\frac{1}{(2\infty+1)}$, $\frac{2}{(2\infty+1)}$, $\frac{3}{(8\infty+1)}$, $\frac{4}{(2\infty+1)}$, $\frac{5}{(2\infty+1)}$, $\frac{n}{(2\infty+1)}$ u. s. w. Theil davon und somit jeder Bogen durch seinen Sinus auch nur in einer ewig unendlichen Reihe (von gleicher Folge der Potenzen des Sinus nach der Differenz 2) oder in einer absoluten Annäherung ins Unendliche bestimmbar und meßbar seün. —

Folg=

Folglich ist ein jeder Bogen aus seinem Sinus nur in einer unendlichen Reihe oder Annäherung gegeben. — Was zu erweißen war.

Diese Reihe ist also jetzt in Hinsicht des Potenzen-Gesetzes genau bestimmt und abgeleitet, und muß hierin der für den $\sin n\alpha$ oder $\sin \frac{1}{n}\alpha$ aus dem $\sin \alpha$ zu finden ähnlich und gleich seün; nur in Hinsicht des Gesetzes der Koefficienten gänzlich ungleich und verschieden davon: denn wäre sie auch hierin dieser gleich, so hörte sie ja auf das zu seün, was sie seün soll, nämlich ein Ausdruck für den Bogen durch seinen Sinus. — Auch dies konnte ein Erl. Rez. bezweifeln.

2. Erweis, die Reihe, den Bogen aus der Tangente zu finden, betreffend.

Wenn und inwiefern ein Bogen oder Winkel durch seine Tangente in einer Funktion meßbar seün; so und insofern muß auch jeder andere Bogen, folglich auch der 2 oder 3fache u. s. w. Bogen durch seine ihm gehörige Tangente rücksichtlich in gleicher Form meßbar seün. Es ist aber des 2 oder 3fachen Bogens Tangente durch des einfachen Bogens Tangente jegliche in einem Bruche gegeben, wo jeder der beiden Ausdrücke sich in eine unendliche Reihe durch unbegränzt fortgesetztes Dividiren verwandelt. Dies macht, daß dann der 2 oder 3fache Bogen durch des einfachen Bogens Tangente auf eine doppelte Weise gegeben oder meßbar ist. Ein Mal: weil jeglicher Bogen ein bestimmtes Vielfaches, nämlich ein 2 oder 3faches des einfachen Bogens ist, und da dieser durch die seinige meßbar angenommen wurde, sie, die 2 oder 3fachen, es dann durch diese Tangente also auch seün müssen. — Zweitens: Weil die Tangente des 2 oder 3fachen Bogens durch des einfachen Bogens Tangente und zwar in einer unendlichen Reihe bestimmbar ist: nämlich

$$\text{tang } 2\alpha = 2\,\text{tang}\,\alpha + 2\,\text{tang}\,\alpha^3 + 2\,\text{tang}\,\alpha^5 + 2\,\text{tang}\,\alpha^7$$
u. s. w.

$$\text{tang } 3\alpha = (3\,\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\alpha^3)\,(1 + 3\,\text{tang}\,\alpha^2 + 3^2\,\text{tang}\,\alpha^4 + 3^3\,\text{tang}\,\alpha^6 + 3^4\,\text{tang}\,\alpha^8 \text{ u. s. w.})$$

Und weil man diese analütischen Ausdrücke oder Werte der Tangenten des 2 oder 3fachen Bogens ihnen substituiren kann.

Hiera

Hieraus leuchtet aber zugleich ein, daß nach geschehener Substitution der 2 oder 3fache Bogen nur in einer Reihe der Potenzen des ersten Bogens Tangente, folgend nach den von 1 bis ins ∞ nach einander fortschreitenden ungeraden Zalen, analütisch bestimmbar ist, weil in der Funktion, für den Bogen aus seiner Tangente, diese wenigstens und notwendig als Faktor darin vorkommen muß. Theils weil der einfache Bogen das $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ vom 2 oder 3fachen ist, theils weil auch beide Gleichungen für ein und dasselbe 2 oder 3fache des einfachen Bogens einander gänzlich änlich und gleich seün und gesetzt werden, und folglich, von einander abgezogen, einander völlig in allen Gliedern und Theilen aufheben und vernichten müssen; so muß auch der einfache Bogen oder jeglicher Bogen durch seine Tangente nur in einer unendlichen Reihe aller von 1 an auf einander folgenden ungeraden Potenzen seiner Tangente oder in einer unendlichen Annäherung gegeben seün — was eben erwießen werden sollte. —

Das Gesetz in der PotenzenFolge der Tangenten eines Bogens muß in dem Ausdrucke diesen aus jener zu finden gleich und änlich seün dem Gesetze in dem Ausdrucke, die Tangente des 2 oder 3fachen Bogens aus der des einfachen zu bestimmen; in Hinsicht des Gesetzes der Koeffizienten können und dürfen sie dagegen nicht gleich seün, weil dann beide Ausdrücke und gesuchte Größen aufhörten, das zu seün, was sie rücksichtlich seün sollen. Doch da die weitere Konstruktion und SchlußFolge für beide Reihen des Bogens, ihn aus dem Sinus oder aus der Tangente zu finden, ganz ein und dieselbe ist, so mag auch ihre Vereinigung Statt finden.

Weil auch Bogen und Sinusse, Tangenten in der HauptSache, d. i. als Linien überhaupt, homogene Dinge und nur in der Nebensache, d. i. der Richtung oder als krumme oder gerade Linien heterogene Dinge sind, so leuchtet ein, daß die Ausdrücke für und unter einander in der Hauptsache, der PotenzenFolge der bestimmenden Größe unter einander homogen und nur in der Nebensache, dem Koeffizienten Gesetze heterogen oder verschieden seün dürfen.

Sonach haben wir jetzt vor der Hand in beiden Reihen die Koeffizienten als unbekannt, als zu suchende und zu findende weiter zu setzen.

Weil jedoch in der Reihe oder Funktion, den Bogen aus seinem Sinus oder aus seiner Tangente zu finden,

die

die Koeffizienten hier von dem 2, 3, 4 oder 5 oder n oder (2n + 1) oder (2 ∞ + 1)fachen oder von dem Merfachen überhaupt als Größe schlechthin nicht abhängen können und kein Grund vorhanden ist und aus der Natur des Kreißes und seiner Linien sich ergiebt, daß sie von irgend einer andern Größe abhängen sollten: so müssen sich die Koeffizienten, vom ersten bis zum letzten, alle in lauter Zalen ergeben, ihr Gesetz muß unveränderlich seün. Dieserwegen muß der Koeffizient des ersten Gliedes = 1 seün, oder es darf gar keinen haben.

Anm. Man wird hier doch nicht auf den unglücklichen Einfall, wie der Exl. Rez., geraten, als wenn der Bogen dann zur geraden Linie auch hier wie in jener DifferenzialRechnung werde, wann die Reihe, ihn aus seinem Sinus oder seiner Tangente zu finden, in Hinsicht der PotenzenFolge dieses Sinus oder dieser Tangente mit jener, den Sinus oder die Tangente des nfachen Bogens aus dem, der des einfachen Bogens zu finden, gleich und nur in den Koeffizienten verschieden seü! —

Es ist aber dann der 2, 3, 4, 5, 6 oder jeder vielfache Bogen durch des einfachen Bogens Sinus (Tangente) auf eine doppelte Weise in einer unendlichen Reihe, hier in Hinsicht der Koeffizienten unbekannten und zu bestimmenden Reihe, gegeben.

Ein Mal: weil und inwiefern er 2, 3, 4, 5 oder 6faches oder irgend ein Vielfaches des relativ einfachen Bogens ist. Das andere Mal, weil und inwiefern er durch seinen Sinus (Tangente) und dieser (e) durch des einfachen Bogens Sinus (Tangente) in einem analütischen Ausdrucke gegeben ist, welcher bestimmte Wert Statt des Sinus (der Tangente) gebraucht und gesetzt werden kann.

Nach der Vervielfachung der primitiven Gleichung, nach geschehener Substitution und nach vollendetem Ordnen in der andern Gleichung, müssen beide jetzt nur noch in Hinsicht der Koeffizienten unbestimmten Gleichungen oder Reihen einander völlig gleich seün und, beide von einander abgezogen, gänzlich einander vernichten und aufheben, und dieserwegen in beiden gleiche Potenzen von dem Sinus (der Tangente) des einfachen Bogens vorkommen.

Würde die unendliche Reihe mit irgend einer andern Potenz von sin α oder tang α als mit der 1ten anfangen, so würde nach Vervielfachung der primitiven Gleichungen, nach geschehener Substitution und nach vollendetem Ordnen in den andern Gleichungen, keine wechselseitige Aufhe-

Hebung und Vernichtung der ersten Glieder in beiden Gleichungen, und selbst nicht jenes, ins Unendliche mögliche, und erforderliche Multipliziren und damit in der andern Gleichung verknüpftes Substituiren möglich seün, selbst wenn noch die stetige EksponentialDifferenz der folgenden Glieder oder Potenzen 2 wäre. Dagegen würde keine wechselseitige Vernichtung und Aufhebung der folgenden Glieder in beiden Gleichungen eintreten können, wenn auch das erste Glied in den beiden Reihen oder Gleichungen die 1te Potenz von sin α (oder tang α) wäre, jedoch die Differenz der Eksponenten der folgenden Potenzen nicht stetig und dabei nicht die 2 wie in dem Ausdruck für sin n α durch sin α (oder tang n α durch tang α) wäre, weil dann in beiden Gleichungen keine gleichen Potenzen von sin α (oder tang α) vorkommen und, von einander abgezogen, sich vernichten können. Wie das alles von N°. 13–16. deutlich in der Schrift: Deduktion u. s. w. erwießen ward.

Folglich muß sich dann auch alles, was in einerlei Potenz multiplizirt ist, gegenseitig aufheben, woraus sich jedes Mal der Wert eines Koeffizienten und somit die Werte aller beständigen bisher noch unbestimmt gewesenen, bestimmt in Zalen ergeben, wenn der in die erste Potenz multiplizirte darin gegeben ist.

Daß dieser Koeffizient = 1 ist und seün muß, [weil wenn er irgend eine andere Größe, selbst in Zalen, wäre, sie in alle folgenden Glieder übergehen würde und doch kein Grund zu einem dergleichen Einflusse aus der Natur des Kreißes und seiner Linien hervorleuchtet oder sich ergiebt] ist oben und in meiner Deduktion S. 19. §. 12–15. bewiesen worden. Wird nun dieser gefundene Wert eines jeden Koeffizienten in die als allgemein gültig angenommene und abgeleitete Gleichung oder Reihe gesetzt, so ist in derselben das allgemeine Gesetz der Koeffizienten, wornach diese fortschreiten, auch bestimmt. Mithin ist alsdann die allgemeine Gleichung, jedweden Bogen aus seinem Sinus (oder aus seiner Tangente) durch unendliche Annäherung zu finden, sowol in Hinsicht der Glieder oder PotenzenFolge als auch ihrer Koeffizienten genau bestimmt und unumstößlich dargethan. Der Sinus, der Quersinus und die Tangente sind wechselsweise in Funktionen einer der beiden andern Größen gegeben und schon dieserwegen der Bogen durch jedes von den beiden andern

indirekte, — welche Formeln sich jedoch auch direkte nach gleichen Schlüssen wie bei der ersten Größe ergeben.

Alsdann aus der Lere von der Umkerung der Reihen, würden sich schon die Reihen: den Sinus, Quersinus, die Tangente u. s. w. aus dem Bogen zu finden, ergeben; doch werden sie kürzer und natürlicher nach änlichen Schlüssen aus eben der hier angewendeten Grundlage bestimmt, wie sogleich folgt.

B) Nämlich: Wenn und wiefern der Sinus des einfachen Bogens durch seinen Bogen (algebraisch oder transzendent-analütisch, gilt zuvörderst hier gleich viel) meßbar ist; so und insofern ist es auch der Sinus eines jeden andern Bogens, folglich auch des 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w. fachen Bogens Sinus durch diesen seinen rücksichtlichen Bogen.

Ist der Bogen Null, so ist auch der dazu gehörige Sinus Null und der Bogen muß in allen möglichen Gliedern des Ausdrucks für den Sinus als Faktor vorkommen.

Dann ist aber auch der Sinus des 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w. fachen Bogens durch den einfachen Bogen unter einer doppelten Form meßbar: a) ein Mal, weil man, da eines Sinus Bogen, als 2, 3, 4, 5, oder 6faches des einfachen Bogens, eben als dieses, jenes Vielfache gerade durch den einfachen Bogen arithmetisch bestimmt ist und von ihm gemessen wird; weil man, sage ich, diesen Wert Statt den, einfach einstweilen angenommenen, vielfachen Bogen, durch welchen der zugehörige Sinus meßbar gesetzt wurde, überall gebrauchen und setzen kann.

b) das andere Mal, weil man, da der Sinus des 2, 3, 4, 5, oder 6fachen u. s. w. Bogens durch den Sinus des einfachen Bogens in einer analütischen Funktion gegeben ist und dieser Sinus des einfachen Bogens, durch diesen Bogen meßbar (gegeben) seün sollte; weil man, wiederhole ich, diesen Wert des einfachen Bogens Sinus in jene analütische Funktion, für den Sinus des vielfachen Bogens aus dem Sinus des einfachen, oder Gleichung überall an dessen Stelle setzen kann. Es müssen sich daher in Hinsicht des Wertes zwei ganz gleiche Gleichungen oder Funktionen ergeben, worin der Sinus eines 2, 3, 4, 5 oder 6fachen u. s. w. Bogens durch den einfachen Bogen bestimmt und meßbar ist, die sich dann, die eine von der andern abgezogen, gegenseitig aufheben und vernichten müssen. —

Weil aber des 2fachen, 4fachen, oder 6fachen oder allgemein des 2nfachen Bogens Sinus nur in einer ins

Un-

Unendliche fortlaufenden PotenzenReihe analütisch durch des einfachen Bogens Sinus bestimmt und meßbar ist; so kann, vermöge der Anname, daß dieser Sinus durch seinen Bogen meßbar ist und nach geschehener Substitution, dieser Funktion oder dieses Wertes des Sinus in jener unendlichen Reihe, der Sinus des 2, 4, 6 oder 2nfachen Bogens auch nur in einer änlichen ins Unendliche fortlaufenden Reihe von gleicher Folge der Eksponenten der Potenzen (des einfachen Bogens) durch diesen meßbar seün.

Ist aber der Sinus eines 2, 4, oder 6fachen oder 2nfachen Bogens durch den einfachen Bogen nur in einer unendlichen Reihe von Gliedern meßbar, so ist er dies alles (auf gleiche Weise) auch nur durch seinen eigenen Bogen, als dem bestimmten Vielfachen des einfachen, selbst. Mithin ist der Sinus des einfachen Bogens nur in einer unendlichen Annäherung oder Reihe von Potenzen des Bogens nach einer gleichen Folge der Eksponenten meßbar. — —

Auch diesen Erweis der Unendlichkeit dieser Reihe möchte man für unzulänglich oder doch für blos Bedingungs-Weise, nur gültig anerkennen, weil auf die allgemeine Anwendung der BinomialFormel auf IrrationalGrößen, hier den Kosinus durch eine Funktion des Sinus und Halbmessers auszudrücken und der sich daraus ergebenden Unendlichkeit der Reihe, er beruht. Hier den unter jeder Bedingung, oder Potenzirung gültigen Erweis. —

Erweis.

Da jedoch der Sinus des 3, oder 5, oder 7fachen oder allgemein des $(2n+1)$fachen, oder des $(2\infty+1)$fachen Bogens nur in einer Reihe der von 1, 3, 5, 7 oder bis $(2n+1)$ oder $(2\infty+1)$ auf einander folgenden ungeraden Potenzen des ersten Bogens Sinus bestimmbar ist; so kann (vermöge der Anname, daß dieser letzte Sinus durch seinen Bogen in einer Funktion meßbar ist und nach geschehener Substitution derselben oder dieses Wertes des Sinus in jener Reihe,) der Sinus des 3, 5, oder 7fachen oder $(2n+1)$fachen Bogens, oder, [da n irgend einen noch so großen Wert ins Unendliche annemen, mithin auch $= \infty$ werden kann,] des $(2\infty+1)$fachen Bogens auch nur in einer in Hinsicht der PotenzenFolge des ein-

einfachen Bogens (oder der EksponentialDifferenz) gleichen Reihe analütisch bestimmbar seün. Oder vermöge der Anname der Meßbarkeit des Sinus durch seinen Bogen in einer Funktion, und nach geschehener Substitution derselben oder dieses Wertes muß die Funktion für den Sinus des 3; oder 5; oder 7fachen; oder des (2n + 1)fachen; oder des (2∞ + 1)fachen Bogens die 1te und 3te; 1. 3. und 5te; 1. 3. 5. und 7te; 1. 3. 5. 7. bis (2n — 1)te, (2n + 1)te Potenz oder die 1. 3. 5. 7. . . . . (2n — 1)te, (2n + 1)te bis (2∞ — 1)te, (2∞ + 1)te Potenz des einfachen Bogens enthalten, oder sie müssen in Einer und derselben Reihe zusammen als Faktoren vorkommen, weil der, jedem Sinus rücksichtlich zugehörige, Bogen in des ersten Funktion wenigstens als Faktor darin vorkommen muß.

Dieserwegen kann und muß die Funktion für den Sinus des (2n + 1)fachen und somit des (2∞ + 1)fachen Bogens, selbst nur in einer solchen Folge der ungeraden von 1 an bis (2n + 1) oder (2∞ + 1) fortlaufenden Potenzen des einfachen Bogens bestehen, oder sie muß eine ins Unendliche nach der Differenz zwei fortschreitende Folge der ungeraden Potenzen des einfachen Bogens seün. Ist aber der Sinus des (2n + 1) oder des (2∞ + 1)fachen Bogens nur in einer unendlichen PotenzenReihe des einfachen Bogens gegeben, so ist er dies alles auch (auf gleiche Weise) nur durch seinen eigenen Bogen, als dem bestimmten Vielfachen, entweder als (2n + 1) oder als (2∞ + 1)fachen des einfachen Bogens selbst; d. h. weil der einfache Bogen der (2n + 1)te oder (2∞ + 1)te Theil von seinem eigenen Bogen ist. Mithin ist der Sinus des ∞fachen, des n, (n — 1) bis 7, 6, 5, 4, 3, 2, und 1fachen Bogens notwendig auch durch seinen eigenen Bogen selbst, nur in einer gleichen unendlichen PotenzenReihe seines Bogens (von 1. 3. 5. bis (2∞ + 1)ten Potenz) meßbar, oder in einer absoluten Annäherung ins Unendliche nur bestimmbar, weil es der Sinus des (2∞ + 1)fachen Bogens durch den seinigen ist.

Der Sinus eines jeglichen Bogens ist also nur in einer unendlichen Reihe der ungeraden Potenzen seines Bogens oder in einer unendlichen Annäherung gegeben. — Diese Reihe ist hier jetzt in Hinsicht des Gesetzes der PotenzenFolge des Bogens bestimmt und abgeleitet, es muß hierin das nämliche Gesetz

ob-

obwalten, welches in der Funktion von sin n α aus den sin α zu finden von den Potenzen von sin α herrscht. Bei einer geringsten Abweichung oder Verschiedenheit in diesem Gesetze würde nach geschehener Substitution die geforderte Aufhebung der ersten oder der folgenden Glieder unmöglich seün. Beide Reihen müssen jedoch in Hinsicht des Gesetzes der KoeffizientenFolge gänzlich von einander verschieden seün, weil sonst dann der Bogen aufhörte, das zu seün, was er seün soll und ist, krumme Linie, er würde zum Sinus des einfachen Bogens.

Weil jedoch diese besondere Multiplikation in dieser Reihe oder Funktion, den Sinus aus seinen Bogen zu finden, auf die Natur der Koeffizienten keinen Einfluß haben kann und darf und sie von dem 2, 3, 4, 5 oder n oder (2 n + 1) oder (2 ∞ + 1)fachen oder von dem Merfachen überhaupt als Größe schlechthin nicht abhängen können, auch kein Grund vorhanden ist und aus der Natur des Kreißes und seiner Linien sich ergiebt, wie sie von irgend einer andern Größe abhängig seün könnten; so müssen sich solche vom ersten bis zum letzten alle in lauter Zalen ergeben. Dieserwegen muß vor allen Dingen der Koeffizient des ersten Gliedes = 1 seün oder es darf keinen haben.

Setzt man nun würklich in die beiden jetzt nur noch in Hinsicht der Koeffizienten unbestimmten, der Potenzen-Folge aber ganz bestimmten Gleichungen, die zu substituirenden Werte, — in die eine Gleichung den arithmetischen Wert des bestimmten vielfachen Bogens durch den einfachen gegeben; in die andere den transzendenten analütischen Wert des einfachen Bogens Sinus durch diesen seinen Bogen, und ordnet alles, was in dieser Gleichung in einerlei Potenz des Bogens multiplizirt ist, zu einander: hierauf beide in Hinsicht des Wertes ganz gleiche Gleichungen, worin gleiche Potenzen vorkommen, von einander abgezogen, so müssen sich beide einander aufheben und vernichten. — [Ein anderer Anfang oder eine andere Folge der Potenzen des Bogens würde nach geschehener Substitution keine Aufhebung und Vernichtung der ersten oder der folgenden Glieder gestatten.] Woraus sich dann jedes Mal der Wert eines beständigen, gerate in diese Potenz multiplizirten und bisher noch ungestimmt gewesenen Koeffizienten, und somit nach und nach die Werte aller, bestimmt in Zalen ergeben; wenn der in die erste Potenz oder in das

erste

erste Glied multiplizirte darin gegeben ist, welcher Koeffizient aus der Umkerung der Reihen und nach einer gleichen BeweisFürung, wie die bei dem vorigen Probleme erwänte, notwendig = 1 seün muß und auch ist.

Setzt man nun in jedes Glied der als allgemein gültig angenommenen Reihe den eben gefundenen Wert eines Koeffizienten; so ist das allgemeine Gesetz, wornach jede Reihe, einen Sinus aus seinem Bogen zu finden, fortschreitet, bestimmt.

Da der Wert vom Quersinus, von der Tangente u. s. w. eines Bogens in einer Funktion des Sinus gegeben ist, und mit diesen zugleich im Anfange = o wird; so ist auch insofern der Quersinus, die Tangente u. s. w. in einer unendlichen Reihe durch den Bogen gegeben, inwiefern es der Sinus ist. Auch nach der Lere von der Umkerung der Reihen würden sich die obigen aus diesen wieder ergeben.

Da in der Trigonometrie erwießen wird, die zweite Wurzel aus, oder die $\frac{1}{2}$ Potenz vom halben Quersinus eines Bogens seü gleich dem Sinus des halben Bogens; so ist der Ausdruck: den Bogen durch den Quersinus und umgekert den Quersinus aus den Bogen zu finden, leicht gefunden.

C) Wenn und inwiefern der Sinus, oder Quersinus u. s. w. des nfachen Bogens durch diesen, d. i. durch das nfache des einfachen Bogens und dieser einfache Bogen durch seinen Sinus oder durch seinen Quersinus, oder durch seine Tangente u. s. w., jegliche Größe durch die andere in einer unendlichen Reihe gegeben ist; so und insofern ist der der Sinus, oder der Quersinus des nfachen Bogens durch den Sinus oder durch den Quersinus, oder durch die Tangente des einfachen Bogens (in einer analütischen Reihe, wenn $n > 1$ und eine ganze Zal; in einer transzendenten Reihe, wenn $n < 1$ oder eine gebrochene Zal ist,) bestimmt; je nachdem man nämlich Statt den, in sein nfaches multiplizirten, einfachen Bogen, seinen, in seiner transzendenten Funktion, entweder des Sinus, oder des Quersinus, oder der Tangente ausgedruckten, Wert in die erste oder in die andere transzendente Reihe setzt, und alles, was dann in einerlei Potenz des Sinus oder Quersinus oder der Tangente u. s. w. des einfachen Bogens multiplizirt ist, zu einander ordnet und addirt. Aus den sich daraus ergebenden analütischen höchst merkwürdigen, noch neuen Formeln entspringen viele andere besondere für be-

son-

sondere Fälle, je nachdem man besondert, von unberechnenbarem Nutzen. — Aus den neuen Formeln den Sinus und Kosinus des nfachen Bogens aus der Tangente des einfachen zu finden, hätte ich jene beiden Formeln für $\sin n\alpha$ und $\cos n\alpha$, aus dem $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ zu finden, ableiten sollen, die ich viel früher oben aus Kästner's Analüsis des Endlichen in meiner Deduktion anfürte.

Die würkliche Auflößung dieser drei GeneralProbleme ist in meiner Schrift: rein wissenschaftliche Deduktion u. s. w. selbst nachzusehen. —

Das Geheimnis der Methode im Allgemeinen werde offenbaret und weltkundig, — denn man zwingt mir es ja vor der Zeit ab.

Merkwürdiges Resultat. —

Man verwandele in dieser streng wissenschaftlichen Methode oder Deduktion für diesen speziellen Fall der Kreislere die speziellen Namen Sinus, Quersinus, Bogen in die allgemeinen Ordinate, Abszise, Kurve, und man hat den Einen und allgemeinen Weg, wie man mit absoluter Evidenz, Kürze, Einfachheit und Nettigkeit, one alle unmathematische Differenzial- und IntegralRechnung, die Kurve aus ihrer Ordinate oder Abszise nnd umgekert diese aus ihrer Kurve in einer unendlichen Reihe oder Annäherung und die Ordinate oder Abszise der nfachen Kurve aus der Ordinate oder Abszise der einfachen Kurve in einer analütischen Formel finden kann und soll. Man braucht nur nach der Eigentümlichkeit oder Natur jeder krummen Linie oder Figur die Funktionen für die Abszise oder Ordinate der 2, 3, oder 4fachen Kurve aus der Abszise oder Ordinate der einfachen Kurve abzuleiten und dann eine homogene SchlußFolge wie in A, B und C zu ziehen, so findet man eben so änliche Reihen für änliche Größen beim bloßen Gebrauche der allge-

gemeinsten Regeln der UrrechnenLere (mit gänzlicher Entberung aller trügerischen Künste einer Differenzial- oder Lagrang'ischen FunktionenRechnung.) In einer urrechnenden RaumLere werden diese Auflößungen der bekannten und gänzlich zeither unbekannten Kurven vorkommen.

Anm. Diese allgemeine Regel aus diesem speziellen Fall abzuleiten, war man unvermögend, weil man die Tiefe, Weite und Erhabenheit der UrrechnenLere nicht kennt, sonst hätte man die Umgehung der DifferenzialRechnung, als blos bei diesem speziellen Fall möglich, nicht bespöttelt und bekrittelt.

Können Schlüsse rationeller, kann ein Verfaren, eine Methode kürzer, schlichter, leichter und gewisser seün, als wenn sie, wie die obigen, auf den schlichten Regeln des Multiplizirens und Dividirens und Gleichnens beruhen!? — und sind dann deren Resultate "dem Zufalle oder einem „oftmals mißlungenen und endlich geglückten Versuche hier „zu danken?" können dergleichen Dinge hier nur walten?

Nur Ein Weg kann der ware und richtige seün, nämlich der gerade und schlichte und welcher ist gerader, schlichter als der unsrige? — Sonst muß jeder zeitherige rein algebraische Kalkul bei Gleichungen vom zweiten und dritten Grade höchstkrumm und Schärfe los gewesen seün: und dies wird man doch nicht zugeben wollen? —

Ich hätte obige strengsten Erweiße und Ableitungen meiner Deduktion einverleiben können, wenn ich theils nicht befürchtet hätte; der Schrift durch ein solches mer philosophisch mathematisches Resonnement zu schaden — — dessen man eben in der Mathem. bisher noch nicht gewont ist; theils wenn ich nicht das Benemen und die Anfälle der tiefsten Anbeter von Newton und Leibnitz, deren Leren und Sätze zu Zeiten alle für heilige OrakelSprüche gehalten werden, bei künftigen von mir zum Vorschein kommenden viel größern Ausmerzungen anderer unsteter Leren im ganzen Felde der Wissenschaft hierdurch hätte ausforschen wollen. — Ich weis doch nun was für eine — Aufname ich mir für meine, uns neuen, doch uralten Süsteme und Methoden zu versprechen habe. —

Hätte man zu Archimedes Zeiten oder doch zu Leibnitz'ens Zeiten bei einigem Weiterdenken eine solche Schluß-Folge, wie diese drei, gezogen, und das konnte man; so wäre die sogenannte endliche ZirkelQuadratur als ein Unding in die tiefste Vergessenheit längst geraten und in

der Geschichte würde sie nur als eine Verirrung des menschlichen Geistes angefürt werden. Die Frage: wie konnte man aber, one sich meiner streng wissenschaftlichen Methode zu bedienen, die nämlichen Resultate öfters, auf andern Wegen erhalten? — fand in Obigen theils ihre Beantwortung, theils liegt sie in dem Folgenden auf das Unzweideutigste. —

Rektifikationen der Parabel, Ellipse und Hüperbel. —

In den Formeln von N°. 1 bis 5 kommen Größen vor, wie da sind die rücksichtlichen Ordinaten (Sinusse) oder Kosinusse (QuerAbszissen) und die rücksichtlichen Radien, welche sämmtlich wechselsweise Funktionen von einander sind, wobei durch Stattsetzung keine Ausmerzungen möglich sind, wie man sie in 6, 7 und 8 glaubt gemacht zu haben: Man kann nicht $\frac{\sin\alpha}{\mathrm{rad}\,\alpha} = \frac{\sin''\alpha}{\mathrm{rad}''\alpha}$ u. s. w. setzen, weil bei gleich großen Bögen die Radien nicht gleich sind, vielmer stets positiv oder negativ wachsen, wie gegentheils die Ordinaten das Umgekerte beobachten. Die Ursache liegt darin, daß im Zirkel die Radien stets senkrecht auf den Bögen aufstehen, das Krümmen rechtwinklicht geschieht; bei andern Kurven oder Kreißen aber nicht, wo die stete — Krümmung in jedem Momente entweder eine stumpfwinklichte oder eine spitzwinklichte ist: Oder weil die Konstruktion (WissenSchöpfung) hier ekszentrisch, d. h. Düo- oder Polüzentrisch ist, wodurch eben EinfallWinkel (AbstralungsWinkel) der Stralen aus den Düozentral- oder PolüzentralPunkten an der Peripherie inner derselben begründet werden. —

Das nichtrechtwinklichte Krümmen bedingt die Einfall- oder AbstralungsWinkel inner der Peripherie an ihr und umgekert: dieser Winkel bedingt jenes nichtrechtwinklichte Krümmen der Kurven, es waltet hier Wechsel-Bedingung; dies muß so seün, weil bei einem rechtwinklichten Einfallen oder Anstralen der Stralen vom Zentral-Punkte derselben aus (wie beim Kreis) jeder Stral in sich selbst fällt, zurück geht.

Die-

Dieser EinfallWinkel, seŭ es an dem Bogen der Parabel, Ellipse oder Hüperbel u. s. w., ist am Beginnungs-Punkt des Krümmens jeder Kurve, d. h. am Scheitel = o, muß es da seün, und wächst in gleichem Verhältnisse, wie der Bogen von diesem an zunimmt. Die Spiralen machen eine Ausname davon. Er (der Winkel) erreicht vom Scheitel an sein nfaches, wie es der Bogen erreicht, auf dessen Ende er steht; und muß es erreichen, ob der Stetigkeit der Krümmung oder des Krümmens in jedem Momente. — Hier liegt das Müsterium aller Kurven begraben, jetzt ist es aufgehoben; dieses notwendige nfach Werden des Abstralungs-Winkels an der Kurve mit dem zu gleichen nfachen Werden des Bogens vom Scheitel an und umgekert, schließt die Rektifikationen aller Kurven anf, macht sie mit höchster Evidenz möglich. Dies notwendig Gesetzmäßige anete, fülte man dunkel, als man aus Drang die Differenzialen und Integralen oder Fluksionen erfand, und durch die damit verknüpfte RechnungsMethode und durch fälschliche Anwendung des Püthagoräischen LerSatzes, des Schlüssels zum Auflößen aller dergleichen Rektifikationen stetiger Kurven sich bemächtigt zu haben glaubte. — Allein jenes so nahe liegende, absolut notwendige und sich, man sollte meinen, sogleich aufdringende Gesetz der Stetigkeit des Krümmens und des gleichförmigen rücksichtlichen Wachsthums von Bogen und AbstralungsWinkel, am Ende desselben, — blieb unerkannt, bei Seite liegen, war für den Geometer nicht vorhanden. — —

Jener Winkel erreicht sein Größtes bei offnen Kurven, wie es diese erreichen, bei geschloßenen oder bei Kreißen aber sein Größtes, wie die Ordinaten ihr Größtes oder Kleinstes erreichen. Durch Bestimmung dieses Einfalls- oder AbstralungsWinkels (der Stralen) an der Peripherie läßt sich allein eine gewisse und richtige Rektifikation mit Grund nur erwarten und hoffen und — — der Erfolg wird es leren, daß wird uns nicht täuschten. — d. h. Durch klare Auffassung der jeder Gekrümmten (Kurve) eigenen Konstruktion, WissenSchöpfung (aus den Fokussen) darf man nur die richtige Rektifikation mit Grund erwarten.

Sie wird aber immer eine ekszentrische bleiben, weil eine konzentrische verlangen so viel hieße, als etwas absolut der Natur der Sache nach Unmögliches verlangen; da ja eben Konzentrizität der Kurven das negativ begründende

dende und begründete ist et Excentricitas oportet esse conditio sine qua non.

ε) Als bekannt und absolut erwießen seŭ es hier vorausgesetzt, daß und warum Stralen, welche aus dem einen BrennPunkte der Ellipse oder der Parabel oder der Hüperbel ausstralen, d. h. auf die Peripherie dieser Kreiße und Kurven nach allen Richtungen geworfen werden; — und zwar daß und warum bei der Ellipse diese Stralen inner derselben in den andern Fokus, bei der Parabel stets senkrecht mit der AksLinie parallel und bei der Hüperbel negativ in den andern Fokus der negativen HüperbelHälfte immer mer von der AksLinie abweichen, oder abstralend doch binnen den Assümptoten fallend, im ∞ mit diesen parallel, flektirt werden.

Eh ist dieser Fleksions- oder BeugungsWinkel der Stralen oder besser seine Hälfte in allen drei krummen Linien zu suchen, und zwar diese Hälften, weil sie nie über einen rechten groß und ihre Tangenten nie negativ oder ihre Sinusse zweideutig werden können. —

Daß dieses halben FleksionsWinkels Tangente oder Sinus im Verhältnis der Ordinaten oder Abszißen der Bögen wachsen und abnemen muß, ergiebt sich notwendig mit Schärfe aus der Rechnung selbst.

ϕ) Zuvörderst werde dieser halbe FleksionsWinkel φ an der Peripherie in der Ellipse, gesucht.

1°) In Fig. 1 ist A der Scheitel an der großen Akse; C der MittelPunkt, F und f die beiden BrennPunkte; AP, die Abszißе vom Scheitel $=$ x; PC $=$ u die Abszißе aus dem MittelPunkt; MP $=$ y, die Ordinate des Ell. Bogens $\alpha =$ AM, dann sind, FM $=$ w und fM $=$ 'w, die Radien nach dem EndPunkte M am Bogen AM, welche den FleksionsWinkel FMf einschließen. Ferner seŭ AC $=$ a der größte Radius vom MittelPunkt aus, CD $=$ c der kleinste von daher, CF $=$ Cf $=$ e die Entfernung eines BrennPunktes vom MittelPunkt, so ist bekanntlich

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(2ax - x^2) = \frac{c^2}{a^2}(a^2 - u^2) \text{ oder } \left(\frac{y}{c}\right)^2 =$$

$$2\left(\frac{x}{a}\right) - \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2 : \text{ wenn } y = \frac{c^2}{a}$$

$= b$ gleich dem halben Parameter; so ist $u^2 a^{-2} = 1 - \frac{}{y^2}$

$y^2 c^{-2} = 1 - c^4 a^{-2} c^{-2} = (a^2 - c^2) a^{-2}$ also $u = (a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} = Cf = Cf = e$ und $FM = w = c^2 a^{-1}$ und $fM = 'w = (4e^2 + c^4 a^{-2})^{\frac{1}{2}} = \frac{2a^2 - c^2}{a} = \frac{a^2 + e^2}{a}$.

2°) Es ist aber $fP = fC + CP = e + u$ und $fM^2 = 'w^2 = fP^2 + MP^2 = (e + u)^2 + y^2 = e^2 + 2eu + u^2 + y^2$ also $'w^2 = e^2 + 2eu + u^2 + c^2 - \frac{u^2 c^2}{a^2} = \frac{a^4 - c^2 a^2 + 2eua^2 + e^2 u^2 + a^2 c^2}{a^2} = \frac{a^4 + 2eua^2 + e^2 u^2}{a^2}$, $'w = \frac{a^2 + eu}{a}$ und da $w = 2a - \frac{a^2 + eu}{a}$ so ist $w = \frac{a^2 - eu}{a}$. Jetzt sind vom Triangel FMf alle drei Seiten, $Ff = FC + Cf = 2e$, $FM = \frac{a^2 - eu}{a}$, $fM = \frac{a^2 + eu}{a}$ gegeben, somit sind auch nach bekannten trigonometrischen Formeln, die drei Winkel FMf, MfF und fFM gegeben, deren Allgemeingültigkeit als anerkannt und war hier vorausgesetzt werden kann und muß.

3°) Nach Georg Vega's trigonometrischen Tafeln ist der $\cos \angle \frac{1}{2} a = v\left(\frac{R^2 'P ('P - 2'A)}{4'B'C}\right)$; vel $\sin \angle \frac{1}{2} a = v\left(\frac{R^2}{4'B'C} ('P - 2'B) ('P - 2'C)\right)$ Wenn $'P = ('A + 'B + 'C)$ und $'A$, $'B$ und $'C$ die drei gegebenen Seiten, a, b und c die diesen Seiten entgegen liegenden Winkel eines Dreiecks abc (oder ABC) bedeuten:

$$\text{oder } R\frac{\sin \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} a} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a, \quad \cot \tfrac{1}{2} a = R\frac{\cos \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} a},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a = R\frac{R[('P - 2'B)('P - 2'C)]^{\frac{1}{2}} (4'B'C)^{-\frac{1}{2}}}{R['P('P - 2'A)]^{\frac{1}{2}} (4'B'C)^{-\frac{1}{2}}} = R$$

$$= R\left(\frac{('P-2'B)('P-2'C)}{'P('P-2'A)}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \text{tang}\tfrac{1}{2}b = R\left(\frac{('P-2'A)('P-2'C)}{'P('P-2'B)}\right)^{-\frac{1}{2}}; \quad \text{tang}\tfrac{1}{2}c = R\left(\frac{('P-2'A)('P-2'B)}{'P('P-2'C)}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\cot\tfrac{1}{2}a = R\frac{R['P('P-2'A)(4'B'C)^{-1}]^{\frac{1}{2}}}{R[('P-2'B)('P-2'C)(4'B'C)^{-1}]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}a = R\left(\frac{'P('P-2'A)}{('P-2'B)('P-2'C)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

4°) Jetzt seŭ $FMf = \varphi = a$, $'A = Ff$, $'B = Mf$, $'C = FM$ so ist $'P = 'A + 'B + 'C = 2e + \frac{a^2+eu}{a} + \frac{a^2-eu}{a} = \frac{2ea+a^2+eu+a^2-eu}{a}$

$= 2\left(\frac{ea+a^2}{a}\right) = 2(a+e)$, also $'P - 2'A = 2a + 2e - 2.2e = 2(a-e)$ also $'P('P-2'A) = 4(a-e)(a+e) = 4a^2 - 4e^2 = 4c^2$, $'P - 2'B = \frac{2a^2+2ea}{a} - \frac{2a^2+2eu}{a} = \frac{2e}{a}(a-u)$;

$'P - 2'C = \frac{2a^2+2ea}{a} - \frac{2a^2-2eu}{a} =$

$\frac{2e}{a}(a+u)$; also $('P-2'C)('P-2'B) = \frac{4e^2}{a^2}(a^2-u^2)$; $\text{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = R(4e^2 a^{-2}(a^2-u^2).(4c^2)^{-1})^{\frac{1}{2}} = c^{-1}e(1-u^2a^{-2})^{\frac{1}{2}}R$: ist nun $u = a$ so ist $\text{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{e}{c}(1-1)^{\frac{1}{2}}.R = 0$ oder Null: Für

$u = 0$;

$u = o$; ist $\text{tang}\frac{1}{2}\varphi = Rec^{-1}(1 - o \cdot a^{-2})^{\frac{1}{2}} = Rec^{-1}$. Wenn $2ax - x^2$ statt $(a^2 - u^2)$ gesetzt wird, so ist $\text{tang}\frac{1}{2}\varphi = \frac{e}{c}(2\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}$; wird nun $x = a$ so ist $\text{tang}\frac{1}{2}\varphi = \frac{e}{c}(2-1)^{\frac{1}{2}}R = \frac{e}{c}R$; oder $x = 2a$; $\text{tang}\frac{1}{2}\varphi = \frac{e}{c}(4-4)^{\frac{1}{2}} = o$ oder Null. Es mag also x grösser oder kleiner als a, und u + oder — seün, so gehören zu dem einen, wie zu dem andern ein gleich grosser $\angle\varphi$.

5°) Es war $\text{tang}\frac{1}{2}\varphi = \frac{e}{c}(1 - \frac{u^2}{a^1})^{\frac{1}{2}}$ und da $1 - \frac{u^2}{a^2} = \frac{y^2}{c^2}$ so ist $\text{tang}\frac{1}{2}\varphi = \frac{e}{c}.\frac{y}{c}R$. Das Grösste von y ist bekanntlich $= c$ und dann ist $\text{tang}\frac{1}{2}\varphi = ecc^{-1}R$; $\mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi = eyc^{-2} = R^{-1}\text{tang}\frac{1}{2}\varphi$. Diesen Wert von $\mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi$ werden wir häufig brauchen. Da

$$\cot\tfrac{1}{2}a = R\left(\frac{'P('P - 2'A)}{('P - 2'B)('P - 2'C)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

so ist $\cot\frac{1}{2}\varphi$

$$= \frac{R}{\text{tang}\frac{1}{2}\varphi} = Rc^2(ey)^{-1} = R\frac{c^2}{ey}$$

Es ist also die Tangente des halben BeugungsWinkels am EllipsenBogen gleich dem Bruche, dessen Zäler das Faktum aus der Ordinate des Bogens β in der Entfernung des Fokus F vom MittelPunkt C und im Sinustotus ist, und dessen Nenner die 2te Potenz des kleinsten Radius $= c$ ist.

a 6°) $\angle MFf = \psi$ so ist $\angle MfF = 2R - \angle FMf - \angle MFf = 2R - \psi - \varphi = \varepsilon$. Nach obiger Vega'schen Formel.

$$(\text{tang}\tfrac{1}{2}\psi)^2 = R^2\frac{(2(a+e)-4e).(2(a+e)-2(a^2-eu)a^{-1})}{2(a+e).(2a+2e-(2a^2+2eu)a^{-1})} =$$

$$= \frac{4(a-e)}{4(a+e)} \frac{\left(\frac{ea+eu}{a}\right)}{\left(\frac{ea-eu}{a}\right)} R^2; \text{ oder}$$

$$\tan g \tfrac{1}{2}\psi^2 = \left(\frac{(a-e)}{(a+e)} \cdot \frac{(a+u)}{(a-u)}\right) R^2 = \frac{(a-e)^2}{a^2-e^2}.$$

$$\frac{a^2-u^2}{(a-u)^2} R^2 = \frac{(a^2-e)^2}{c^4} \frac{a^2 y^2}{x^2} R^2;$$

$$\tan g \tfrac{1}{2}\psi = \frac{(a-e)}{c^2} \frac{ay}{x} R = \frac{(a-e)}{c} \frac{y}{c} \frac{a}{x}$$

$$= \frac{c}{a+e} \cdot \frac{c}{y} \cdot \frac{2a-x}{a} R; \quad \cot \tfrac{1}{2}\psi = \frac{c}{a-e} \cdot \frac{c}{y} \cdot \frac{x}{a} R$$

$$= \frac{(a+e)\, y\, (a)}{c.c.(2a-x)} R$$

b 6°) $\tan g \tfrac{1}{2}\delta$

$$= R^2 \frac{(2(a+e)-4e).(2a+2e-2(a^2+eu)a^{-1})}{2(a+e).(2a+2e-(2a^2-2eu)a^{-1})}$$

$$= \frac{4(a-e)\ (ea-eu)a^{-1}}{4(a+e)\ (ea+eu)a^{-1}} R^2 = R^2 \left(\frac{a-e}{a+e} \cdot \frac{a-u}{a+u}\right)$$

$$= \left(\frac{a^2-e^2}{(a+e)^2} \cdot \frac{(a-u)^2}{a^2-u^2}\right) R^2 = \frac{c^4}{(a+e)^2} \frac{x^2}{a^2 y^2} R^2;$$

$$\tan g \tfrac{1}{2}\delta = \frac{c}{a+e} \cdot \frac{c}{y} \cdot \frac{x}{a} R = \frac{a-e}{c} \cdot \frac{y}{c} \cdot \frac{a}{2a-x} R$$

$$= R\, t \tfrac{1}{2}\delta; \ {}^*\cot \tfrac{1}{2}\delta = \frac{a+e}{c} \cdot \frac{y}{c} \cdot \frac{a}{x} R = \frac{c}{(a-e)} \cdot$$

$$\frac{c}{y} \cdot \frac{2a-x}{a} R \quad \frac{a}{x} \tan g \tfrac{1}{2}\delta = \frac{c}{a+e} \cdot \frac{c}{y} R$$

$$= \frac{a}{2a-x} \tan g \tfrac{1}{2}\psi, \quad \tan g \tfrac{1}{2}\psi = \frac{a+u}{a-u} \tan g \tfrac{1}{2}\delta,$$

$2\, t \tfrac{1}{2}\delta$

$$\frac{2\,t\frac{1}{2}\delta}{1-t\frac{1}{2}\delta^2} = t\delta$$

$$= \frac{2c^2 x\,[(a+e)\,y\,a]^{-1}}{((a(a+e)\,y)^2 - c^4 x^2)\,[a(a+e)\,y]^{-2}}$$

$$= \frac{2c^2 x(a(a+e)\,y}{a^2 y^2 (a^2+2ae+e^2) - c^4 x^2} = t\delta$$

$$= \frac{2c^2\,x\,a(a+e)\,y}{c^2 x[(2a-x)(a^2+ae.2+e^2) - c^2 x]}$$

$t\delta = \frac{y}{u+e}$ und also $t\psi = \frac{y}{e-u}$

Denn $t\psi = \frac{2\,t\frac{1}{2}\psi}{1-t\frac{1}{2}\psi^2} = \frac{2a(a-e)\,y\,(c^2 x)}{c^4 x^2 - (a-e)^2 a^2 y^2}$

$$= \frac{2ay\,c^2\,x(a-e)}{c^4 x^2 - a^4 y^2 + 2a^3\,ey^2 - e^2 a^2 y^2}$$

$$= \frac{2ay(c^2\,x)\,(a-e)}{c^4 x^2 - (a^2+e^2-2ae)\,(2ax-x^2)c^2}$$

$$= \frac{2ay(a-e)}{c^2 x - (a-e)^2\,(2a-x)}$$

$$= \frac{2a\,y\,(a-e)}{(a^2-e^2)x - (a-e)^2\,(2a-x)}$$

$$= \frac{2ay}{(a+e)\,x - (a-e)\,(2a-x)}$$

$$= \frac{2ay}{ax+ex-2a^2+2ae+ax-ex}$$

$$= \frac{2ay}{2a(x-a+e)} = \frac{y}{e-u} = R^{-1}\,\text{tang}\,\psi$$

10) Bei der Parabel, seü es die Appoloniſche oder Neiliſche, oder was ſonſt für eine, ſo iſt die Funktion zwiſchen Abszißе $= x$, Ordinate $= y$ und halben Parameter $= a$; $y^n = (2a)^{n-r} x^r$, alſo $y = (2a)^{\frac{n-r}{n}} x^{\frac{r}{n}}$, wird

$y = a$

$y = a$ so ist $y^n = a^n = 2^{n-r} a^{n-r} x^r$, $1 = 2^{n-r} a^{-r} x^r$

$x^r = (2a)^r 2^{-n}$; $x = a \cdot 2^{1-\frac{n}{r}}$ = der Entfernung des BrennPunktes F vom Scheitel A. Dann ist $FP = u =$ $x - a \cdot 2^{1-\frac{n}{r}}$ oder $a \cdot 2^{1-\frac{n}{r}} - x$ jenachdem x größer oder kleiner als die Entfernung des Fokus vom Scheitel oder jenachdem y die Ordinate größer oder kleiner als der halbe Parameter $= a$ ist.

2o) Wir wollen aber hier nur die Parabel von dem 1. Grade betrachten, wo $n = 2$ und $r = 1$, also $y^2 = 2ax$ ist, da ist die Entfernung des Fokus F vom Scheitel A, $x = \frac{1}{2}a$ also $FM^2 = FP^2 + PM^2 = w^2 = u^2 + y^2$ $= (\mp x \mp \frac{1}{2}a)^2 + y^2 = (4x^2 - 4ax + a^2 + 8ax) 4^{-1} = (4x^2 + 4ax + a^2) 4^{-1}$ also $w = \frac{1}{2}a + x$.

3°) Nun ist an der Peripherie der BeugungsWinkel der Stralen aus dem Fokus $= 2$ rechten weniger dem $\angle MFP = \psi$ d. h. $=$ dem Kompliment zum Winkel ψ, welchen der Stral mit der AksLinie am Fokus macht, wenn nämlich $y > a$ d. h. die Ordinate größer als der halbe Parameter. Ob des stetig mit der AksLinie parallelen Weges, welchen sämmtliche inner der Peripherie gebeugte Stralen nemen. Folglich $\tang \frac{1}{2}\Phi = \cot \frac{1}{2}\psi = \cot \frac{1}{2} \angle MFP$ wenn $y > a$. Ist aber $y < a$ so ist $\angle MFP = \angle FMf$ und $\tang \frac{1}{2}\Phi = \tang \frac{1}{2}\psi$, weil dann $\angle MFP = \angle MFA$ wird. Eigentlich ist $\angle FMf$ stets $\angle AFM$ und dieser stumpf oder spitz wie $y \gtrless a$ ist.

4°) In dem Triangel FMP oder FMp sind aber die drei Seiten bekannt, folglich sind es auch die Winkel, die ihnen gegen über liegen. Diese sind dann leicht nach den Formeln

$$\tang \tfrac{1}{2}a = R\left(\frac{('P - 2'B)('P - 2'C)}{'P('P - 2'A)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\tang \tfrac{1}{2}b = R\left\{\frac{('P - 2'A)('P - 2'C)}{'P('P - 2'B)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\tang \tfrac{1}{2}c = R\left\{\frac{('P - 2'A)('P - 2'B)}{'P('P - 2'C)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

cot

$\cot\frac{1}{2}a = R\left(\frac{P(P' - 2'A)}{(P-2'B)(P'-2'C}\right)^{\frac{1}{2}}$ zu finden;
wo $A = y$, $B = \frac{1}{2}a + x$ und $C = \mp\frac{1}{2}a \mp x$ ist:
wir wollen erst den Fall annemen, wo $\frac{1}{2}a > x$, dann den, wo $\frac{1}{2}a < x$ ist.

5°) $'A + 'B + 'C = 'P = y + (\frac{1}{2}a + x) + (\frac{1}{2}a - x) = a + y$; $'P - 2'A = a - y$ also $'P('P - 2'A) = (a + y)(a - y) = a^2 - y^2 = a^2 - 2ax$; $'P - 2'B = a + y - a - 2x = y - 2x$, $'P - 2'C = a + y - a + 2x = y + 2x$; $('P - 2'B)(P - 2'C) = (y - 2x)(y - 2x) = y^2 - 4x^2 = 2ax - 4x^2$.

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \text{tang}\tfrac{1}{2}\psi = R\left(\frac{2ax - 4x^2}{a^2 - 2ax}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= R\left(\frac{2x(a-2x)}{a(a-2x)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} R = \left(\frac{y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} R$$

$$= \frac{y}{a} R \quad \text{Also } \mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi = R^{-1}\,\text{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = y a^{-1}$$

7°) Der zweite Fall, wo $\frac{1}{2}a < x$.

$\text{tang}\frac{1}{2}\varphi = \cot\frac{1}{2}\psi = 'P = y + \frac{1}{2}a + x - \frac{1}{2}a + x = 2x + y$; $'P - 2'A = 2x - y$; $'P('P - 2'A) = (2x + y)(2x - y) = 4x^2 - y^2 = 4x^2 - 2ax = 2x(2x - a)$; $'P - 2'B = 2x + y - a - 2x = y - a$; $'P - 2'C = 2x + y + a - 2x = y + a$, $('P - 2'B)('P - 2'C) = (y - a)(y + a) = y^2 - a^2 = 2ax - a^2 = a(2x - a)$. $\text{tang}\frac{1}{2}\varphi$

$$= \cot\tfrac{1}{2}\psi = R\left(\frac{'P('P - 2'A)}{('P-2'B)('P-2'C)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= R\left(\frac{2x(2x-a)}{a(2x-a)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} R = \left(\frac{2ax}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} R$$

$$= \left(\frac{y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} R = y a^{-1} R.$$

$\text{tang}\frac{1}{2}\varphi$ bleibt also auch in diesem Fall $= y a^{-1} R$

Es mag also φ gröſſer oder kleiner seün als ein rechter $\angle$, so ist die Tangente von $\frac{1}{2}\varphi$ stets der Quotient aus dem halben Parameter in die Ordinate vom Parabel-Bogen β, multiplizirt mit dem Sinustotus.

8v) Bedenkt man in dem allgemeinen Ausdrucke für die $\text{tang}\frac{1}{2}\varphi = e\,y\,c^{-2}\,R = \frac{y\,R}{c^2\,e^{-1}}$ bei Ellipsen-Bogen, daß, wenn in der Ellipse der gröſte Radius $= \infty$, die Brenn-Weite vom Mittel-Punkt auch $= \infty$ ist und dann a statt e substituirt werden kann, so wäre unter dieser Bedingung $\text{tang}\frac{1}{2}\varphi = \frac{y\,R}{c^2\,a^{-1}}$, wo dann bekanntlich $c^2\,a^{-1} =$ den halben Parameter, welchen wir oben auch durch a bezeichnet haben und man hat ebenfalls $\text{tang}\frac{1}{2}\varphi = y\,a^{-1}\,R$

11) Der allgemeine Ausdruck für alle mögliche Parabeln von mannigfaltigster Ordnung soll $y^m = b^{m-n}\,x^n$ seün, wenn y Ordinate, b Parameter und x Abszise vom Scheitel angerechnet ist, also auch $y^m\,b^{-m} = x^n\,b^{-n}$ oder $y\,b^{-1} = x^{\frac{n}{m}}\,b^{\frac{n}{m}}$, $x\,b^{-1} = y^{\frac{m}{n}}\,b^{-\frac{m}{n}}$ oder z statt $y\,b^{-1}$ und w statt $x\,b^{-1}$ gesetzt ist $z^m = w^n$, $z = w^{\frac{n}{m}}$ und $w = z^{\frac{m}{n}}$.

Ist $m \gtrless n$ so ist der Parabel-Bogen w entweder gegen x immer weniger neigend wie y wächst und hol gegen x und y; oder von x immer weniger abneigend wie y wächst und erhaben gegen x und y.

2°) Wäre da stets der Fokus F in der Akse, wo die Ordinate FB dem halben Parameter gleich wird, so wäre x oder die Abszise vom Scheitel $= b\,2^{-\frac{m}{n}}$ und die Abszise vom Brenn-Punkt $= u = \mp\, b\,2^{-\frac{m}{n}} \mp x$ der Radius-Vektor $= z = (y^2 + u^2)^{\frac{1}{2}}$ dann ist die Tangente des halben Beugungs-Winkels der Stralen an der Periphe-

rie, wenn $b\,2^{-\frac{m}{n}} \gtrless x$ oder $\text{tang}\frac{1}{2}\varphi$

$= [(z + u$

$$= \left\{ \frac{(z+u+y)(z+u-y)}{(y+z-u)(y-z+u)} \right\}^{\frac{1}{2}} R$$

$$= \left(\frac{z^2+u^2+2uz-y^2}{y^2-z^2-u^2+2uz} \right)^{\frac{1}{2}} R$$

$$= \left(\frac{2u(z+u)}{2u(z-u)} \right)^{\frac{1}{2}} R \text{ weil } z^2 = y^2 + u^2$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \left\{ \frac{(z+u)(z-u)}{(z-u)(z-u)} \right\}^{\frac{1}{2}} R = \frac{y}{z-u} R$$

$$= \frac{yR}{(y^2+b^2 2^{-2\frac{m}{n}}+x^2-2bx2^{-\frac{m}{n}})^{\frac{1}{2}}+b2^{-\frac{m}{n}}-x}$$

Oder da nun $u = b2^{-\frac{m}{n}} - x$ so ist $\text{tang}\tfrac{1}{2}\varphi$

$$\frac{y}{z-b2^{-\frac{m}{n}}+x}$$

3°) Wenn $b2^{-\frac{m}{n}} < x$ so ist $\text{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \cot\tfrac{1}{2}\psi$

$$= \left\{ \frac{(y+z-u)(y-z+u)}{(z+u-u)(z+u-y)} \right\}^{\frac{1}{2}} R$$

$$= \left(\frac{z-u}{z+u} \right)^{\frac{1}{2}} R = \frac{y}{z+u} \text{ da nun aber hier}$$

$u = x - b2^{-\frac{m}{n}}$ so ist $\text{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \dfrac{yR}{z-b2^{\frac{m}{n}}+x}$.

Es mag also $\varphi \leqq R$ d. h. $\leqq$ als ein rechter Winkel seün, so ist die $\text{tang}\tfrac{1}{2}\varphi$ gleich der Ordinate y multiplizirt mit dem Sinustotus, dividirt durch den RadiusVektor *plus* der Abszise vom Scheitel weniger dem kleinsten RadiusVektor. bei jeder Parabel.

12) Bei der Hüperbel

ist der BeugungsWinkel der Stralen aus dem Fokus F an der Peripherie in Fig. 3 gleich dem Komplimentswinkel zu zwei Rechten, welchen die RadiiVektoren aus dem

dem positiven und negativen Fokuße mit einander am Einfallspunkte der Peripherie machen oder $\angle FMG = 2R - \angle FMf$ und wenn $\angle FMG = \varphi$ und $\angle FMf = \psi$ so ist $\varphi = 2R - \psi$, $\text{tang}\frac{1}{2}\varphi = \cot\frac{1}{2}\psi$

2°) In dem $\triangle FMf$ sind die Seiten als bekannt anzunemen, folglich auch die ihnen gegen über liegenden Winkel.

Wenn a die halbe große Akse $= CB = CA$, c die halbe kleine $= AE = Ae$, so ist $a^2 + c^2 = e^2 = CE^2$ Ce^2 und $CE = e$, $PM = y$ die Ordinate, $CP = u$ die Abszise vom Mittelpunkt C und $AM = \beta$, der Hyperbelbogen Radiivektoren $= FM = eua^{-1} - a =$ $(eu - a^2)a^{-1}$, $fM = eua^{-1} - a + 2a = (eu + a^2)a^{-1}$ und $Cf = Cf = e$. Also $fF = 2e$, in

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}\psi = \left(\frac{('P - 2'B)('P - 2'C)}{'P('P - 2'A)}\right)^{\frac{1}{2}} R = \cot\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$'P = 'C + 'B + 'A = \frac{eu - a^2}{a} + \frac{eu + a^2}{a}$$

$$+ 2\frac{ea}{a} = 2e\left(\frac{u + a)}{a}\right); \quad 'P - 2'A = \frac{2eu + 2ea}{a}$$

$$- \frac{4ea}{a} = 2e\left(\frac{u - a}{a}\right); \quad \text{also } 'P('P - 2'A)$$

$$= \frac{4e^2}{a^2}(u + a)(u - a) = 4e^2(u^2 - a^2)a^{-2}.$$

$'P - 2'B = (2eu + 2ea)a^{-1} - (2eu + 2a^2)a^{-1} = 2(e - a)$;
$'P - 2'C = (2eu + 2ea)a^{-1} - (2eu - 2a^2)a^{-1} = 2(e + a)$;
$('P - 2'B).('P - 2'C) = 4(e^2 - a^2) = 4a^2 +$
$4c^2 - 4a^2 = 4c^2$: also $\text{tang}\frac{1}{2}\psi = \left(\frac{4c^2a^2}{4e^2(u^2 - a^2)}\right)^{\frac{1}{2}} R$

$$= \frac{c^2}{e^2(u^2a^{-2} - 1)} R \text{ und da } y^2c^{-2} = u^2a^{-2} - 1$$

so ist $\text{tang}\frac{1}{2}\psi = R\left(\frac{c^4}{e^2y^2}\right)^{\frac{1}{2}} = Rc^2(ye)^{-1}$
$= \cot\frac{1}{2}\varphi$;

3°) Also

3°) Also $\text{tang}\frac{1}{2}\varphi = \frac{R^2}{Rc^2(ey)^{-1}} = Reyc^{-2}$

was zu suchen war: oder

$\text{T}\frac{1}{2}\varphi = eyc^{-2} = \text{tang}\frac{1}{2}\varphi R^{-1}$

Welche Uebereinstimmung mit jenem Ausdrucke für die Tangente des BeugungsWinkels an der Peripherie der Ellipse, welcher auch $Reyc^{-2}$ nur daß bei dieser $e = (a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}$ dort $= (a^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$; ellipf. $e^2 = a^2 - c^2$. hüperb. $'e^2 = a^2 + c^2 = e^2 + 2c^2$

4°) Die Hälfte des Winkels $MFP = \omega$ d. h. des Winkels zu finden, welchen der RadiusVektor FM mit der AksLinie am positiven Fokus F macht.

Es ist $\angle MFO = 2R - \angle MFf$, $\omega = 2R - \tau$ also $\text{tang}\frac{1}{2}\omega = \cot\frac{1}{2}\tau$, $\cot\frac{1}{2}\omega = \text{tang}\frac{1}{2}\tau$ wenn nämlich $u > e$ oder $CP > CF$

Ist aber $u < e$ oder $CP < CF$ so ist $\angle MFP = \angle MFf$ also $\omega = \tau$ und $\text{tang}\frac{1}{2}\omega = \text{tang}\frac{1}{2}\tau$ Dies ist wol zu merken.

Es ist aber $\text{tang}\frac{1}{2}\tau = R\left(\frac{('P-2'A)('P-1'C)}{'P('P-2'B)}\right)^{\frac{1}{2}}$

wo dann $'C + 'B + 'A = 'P = (eu - a^2 + eu + a^2 + 2ea)a^{-1} = 2e(u+a)a^{-1}$, $'P - 2'A = 2e(u+a)a^{-1} - 4e = 2e(u-a)a^{-1}$; $'P - 2'B = (2eu + 2ae)a^{-1} - (2eu + 2a^2)a^{-1} = 2(e-a)$; $'P - 2'C = (2eu + 2ea)a^{-1} - (2eu - 2a^2)a^{-1} = 2(e+a)$:

$$\text{tang}\frac{1}{2}\tau = \left\{\frac{2ea^{-1}(u-a).2(e+a)}{2ea^{-1}(u+a).2(e-a)}\right\}^{\frac{1}{2}}R$$

$$= \left(\frac{(u-a)(e+a)}{(u+a).(e-a)}\right)^{\frac{1}{2}}R.$$

$$\left(\frac{(u^2a^{-2}-1)(e^2-a^2)}{(ua^{-1}+1)^2\ (e-a)^2}\right)^{\frac{1}{2}}R$$

=

$$\equiv \left(\frac{y^2 c^{-2} c^2}{(ua^{-1}+1)^2 (e-a)^2}\right)^{\frac{1}{2}} R;\ \text{tang}\tfrac{1}{2}\tau = R.$$

$$\frac{ya}{(u+a)(e-a)} \equiv \frac{y}{2a+x} \cdot \frac{a}{e-a} R;\quad \text{oder}$$

$$\left(\left(\frac{u-a}{u+a}\right) \cdot \left(\frac{e+a}{e-a}\right)\right)^{\frac{1}{2}} R \equiv \left(\frac{(u-a)^2}{(u^2-a^2)} \cdot \frac{(e+a)^2}{(e-a^2)}\right)^{\frac{1}{2}} R \equiv \frac{(u-a)}{y} \cdot \frac{(e+a)}{a} R \equiv \frac{x}{y} \cdot \frac{e+a}{a} R \equiv \text{tang}\tfrac{1}{2}\tau.$$

Also $\frac{x}{y} \cdot \frac{e+a}{a} R$

$$\cot\tfrac{1}{2}\omega \equiv \frac{y}{2a+x} \cdot \frac{a}{e-a};\ \frac{y}{x} \cdot \frac{a}{e+a} R$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}\omega \equiv \frac{2a+x}{y} \cdot \frac{e-a}{a} R$$

5°) Die Hälfte des Winkels MfF $\equiv \gamma$ d. h. des Winkels zu finden, welchen der größere RadiusVektor fM am negativen Fokus f mit der AksLinie gegen den MittelPunkt C zu macht.

$\frac{1}{2}\angle$MfQ $\equiv$ R $-\frac{1}{2}\angle$MfF also $\frac{1}{2}\chi \equiv R - \frac{1}{2}\gamma$ mithin $\cot\frac{1}{2}\chi \equiv \text{tang}\frac{1}{2}\gamma$, $\text{tang}\frac{1}{2}\chi \equiv \cot\frac{1}{2}\gamma$.

Nun ist aber $\text{tang}\frac{1}{2}\gamma \equiv R\left(\frac{2ea^{-1}(u-a)\,2(e-a)}{2ea^{-1}(u+a)\,2(e+a)}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\equiv \left(\frac{(u-a)\,.\,(e-a)}{(u+a)\,.\,(e+a)}\right)^{\frac{1}{2}} R \equiv \left(\frac{(u^2-a^2)}{(u+a)^2} \cdot \frac{e^2-a^2}{(e+a)^2}\right)^{\frac{1}{2}} R \equiv \left(\frac{y^2 a^2}{(u+a)^2 (e+a)^2}\right)^{\frac{1}{2}} R$$

$$\frac{y}{(u+a)} \cdot \frac{a}{(e+a)} R \equiv \frac{y}{2a+x} \cdot \frac{a}{e+a} R \text{ und auch}$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}\gamma \equiv \left(\frac{u-a}{u+a} \cdot \frac{e-a}{e+a}\right)^{\frac{1}{2}} R$$

$\equiv$

$$= \left(\frac{(u-a)^2\,(e-a)^2}{(u^2-a^2)\,(e^2-a^2)} \right)^{\frac{1}{2}} R = R \frac{u-a}{y} \frac{e-a}{a}.$$

$$\frac{e-a}{a} = \frac{x}{y} \cdot \frac{e-a}{a} R$$

b, ς°) $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varepsilon : \operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega = \frac{x}{y} \cdot \frac{e-a}{y} R :$

$$\frac{2a+x}{y} \cdot \frac{e-a}{a} R = x : 2a + x = u - a :$$

$$u + a = \frac{x}{y} \cdot \frac{e-a}{a} R : \frac{y}{x} \cdot \frac{a}{e+a} R = x^2 c^2 :$$

$$y^2 a^2 = x^2 a^{-2} : y^2 c^{-2} = \frac{y}{2a+x} \cdot \frac{a}{e+a} R :$$

$$\frac{2a+x}{y} \cdot \frac{e-a}{a} R = y^2 a^2 : c^2 (2a+x)^2$$

$$= y^2 c^{-2} : (2a+x)^2 a^{-2} = y^2 c^{-2} : (u+a)^2 a^{-2};$$

$$= \frac{y}{2a+x} \cdot \frac{a}{e+a} R : \frac{y}{x} \cdot \frac{a}{e+a} R = x :$$

$$2a + x \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varepsilon . \operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega = \frac{(e-a)^2\, x(2a+x)}{y^2\, a^2} R^2$$

$$= \frac{e-a}{e+a} R^2 = \frac{y^2 a^2 R^2}{(e+e)^2 (2ax + x^2)}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \varepsilon . \operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega = R^2 c^2 (e+a)^{-2}$$

$$= R^2 (e-a)^2 c^{-2}$$

6°) Also ist $\frac{x}{y} \cdot \frac{e-a}{a} R = \cot \frac{1}{2} \chi = \frac{y}{2a+x} \cdot \frac{a}{e+a} R$

$$\frac{y}{x} \cdot \frac{a}{e-a} R = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \chi = \frac{2a+x}{y} \cdot \frac{e+a}{a} R$$

$$\frac{y}{u-a} \cdot \frac{a}{e-a} R = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \chi = \frac{u+a}{y} \cdot \frac{e+a}{a} R$$

7°) Ist in 4° ω gleich einem rechten Winkel, so ist

$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega = R . 1$ also $R = \frac{ya}{(e+)a} R$, $ya = ex + ax$

und in 6° $\text{tang}\frac{1}{2}\delta\ \text{tang}\frac{1}{2}\omega = R.\text{tang}\frac{1}{2}\delta = \frac{e-a}{e+a}R^2$

$\text{tang}\frac{1}{2}\delta = \frac{e-a}{e+a}R = \frac{(e-a)^2}{c^2}R = \cot\frac{1}{2}\psi$

$= \text{tang}\frac{1}{2}\varphi$

(15) 13) Die Winkel fMF in Fig. 1. ∠FMf in Fig. 2. und ∠FMG in Fig. 3. werden in zwei gleiche Hälften getheilt, indem man, rücksichtlich die Linie MF = Mf oder F'm = 'mf, in Fig. 3. FM = MG und fM = Mh nimmt und aus f und G oder f und g Fig. 1; F und f Fig. 2; F und G oder f und h Fig. 3. ZirkelBögen von beliebiger Weite beschreibt, welche sich in h oder H; in G oder g, oder g und H durchschneiden und nach diesen Durchschnitts-Punkten aus dem Punkt M oder m an der Peripherie, gerade Linien zieht.

Die Linien MO nun, oder mo oder der Theil der Linie, welche den jedesmaligen BeugungsWinkel FMf = φ in zwei gleiche Hälften theilt, vom Punkt M an der Peripherie bis dahin, wo er die große AksLinie in O durchschneidet, MO heißt die NormalLinie, PO die SubnormalLinie, MT oder die Linie, welche in M senkrecht auf der NormalLinie aufsteht oder die Ellipse, Parabel, oder Hüperbel in M berürt und in T die verlängerte AksLinie durchschneidet heißt die Tangente des Ellipsen-, Parabel- oder HüperbelBogens β; wie denn PT die Subtangente von β genannt wird, auch OT die Secante von β und AO die QuernormalLinie von β.

Da in den △MTP, △OTM, △MPO als rechte ∠
der ∠TPM = ∠TMO = ∠MPO
der ∠MTP = ∠OTM = ∠OMP und
der ∠MOT = ∠PMT = ∠POM

So verhält sich PO : PM = PM : PT = MO : MT
und PO : OM = PM : MT = MO : TO
und PM : OM = PT : MT = MT : TO

Gestützt auf diese Verhältnisse ist zu finden die Subtangente, Tangente, Subnormale und Normale, Quernomale und Sekante eines Ellipsen, oder Parabel, oder HüperbelBogens β.

(16)

(16) 14) Die Subnormale, Normale, Subtangente, Tangente, Quernormale und Sekante des Ellipsen Bogen β zu finden.

1°) Es seü $\angle fMP = \mu$ und da $\angle fMO = \frac{1}{2}\varphi$ so ist $PO = \text{tang}(\mu - \frac{1}{2}\varphi) = R \,.\, \mathfrak{T}(\mu - \frac{1}{2}\varphi)$ und $\mathfrak{T}\mu = \text{tang}\,\mu R^{-1} = Pf.PM^{-1} = (e+u)y^{-1}$, auch $\mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi = eyc^{-2}$ (S. q. (11) 5°) $= R^{-1}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi$

Nun ist aber nach erwießenen trigonometrischen Sätzen

$$\mathfrak{T}(\mu - \tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{\mathfrak{T}\mu - \mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi}{1 + \mathfrak{T}\mu\,\mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi} = (\mathfrak{T}\mu - \mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi)$$

$(1 + \mathfrak{T}\mu\,\mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi)^{-1}$ in diese Formel die Werte von $\mathfrak{T}\mu$ und von $\mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi$ gesetzt erhält man sukzessive die folgenden

$[(e+u)y^{-1} - eyc^{-2}] \,.\, [1 + (e+u)y^{-1} eyc^{-2}]^{-1} = \mathfrak{T}(\mu - \frac{1}{2}\varphi)$

$$\frac{(ec^2 + c^2u - ey^2)\,y^{-1}c^{-2}}{(c^2 + e^2 + eu)\,c^{-2}} = \frac{1}{y}.$$

$$\frac{c^2\,(e+u-e+eu^2a^{-2})}{a^2+eu} = \frac{c^2}{a^2} \,.\, \frac{a^2+eu}{a^2+eu} \,.\, \frac{u}{y}$$

$$\frac{c^2u}{a^2y} = \mathfrak{T}(\mu - \tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{PO}{PM} = \frac{PO}{y}$$

2°) Also subnorm: $\beta = PO = uc^2a^{-2}$, was eben verlangt wurde.

Ist $u = o$ d. h. Null, so ist auch $PO = o$ oder die Punkte P und O fallen in einem zusammen, nämlich in C dem Mittel Punkt.

3°) Da $PM^2 + PO^2 = MO^2 = y^2 + u^2c^4a^{-4}$ $= c^2 - u^2a^{-2}c^2 + u^2c^4a^{-4} = c^2(a^4 - u^2e^2)a^{-4}$; $ca^{-2}(a^2 - eu)^{\frac{1}{2}}(a^2+eu)^{\frac{1}{2}} = c(FM \times fM)^{\frac{1}{2}}a^{-1}$ = normale β, denn $a^{-1}(a^2 - eu) = FM$ und $a^{-1}(a^2+eu) = fM$, ist nun $u = o$ so ist norm. β $= ca^{-2}(a^4 - e^2o^2)^{\frac{1}{2}} = c$

Also ist normal. $\beta = ca^{-2}(a^4 - e^2u^2)^{\frac{1}{2}}$ was gesucht wurde.

Oder

Oder mit Worten: die Normale eines Bogens ist gleich der $\frac{1}{2}$ten Potenz aus dem Faktum der beiden RadiiVektoren multiplizirt in den Bruch, dessen Zäler die $\frac{1}{2}$ kleine Akse c und dessen Nenner die $\frac{1}{2}$ große Akse a ist.

b3°) $\mathfrak{Jn}\,(a^4 - e^2\,u^2)^{\frac{1}{2}} = a^2\,(1 - e^2\,u^2\,a^{-4})^{\frac{1}{2}}$, $u^2\,a^{-2} = 1 - y^2\,c^{-2}$ gesetzt, giebt $(a^4 - e^2\,u^2)$ $= a^4\,(1 - a^{-2}\,e^2\,(1 - y^2\,c^{-2})) = (1 - (1 - c^2\,a^{-2})\,(1 - y^2\,c^{-2}))\,a^4 = (1 - 1 + c^2\,a^{-2} + y^2\,c^{-2} - c^2\,a^{-2}\,y^2\,c^{-2})\,a^4 = a^2\,(c^2 + e^2\,y^2\,c^{-2}) = a^2\,c^2\,(1 + e^2\,y^2\,c^{-4})$ also $a^2\,(1 - e^2\,u^2\,a^{-4})^{\frac{1}{2}} = ac\,(1 + e^2\,y^2\,c^{-4})^{\frac{1}{2}}$ da nun $e^2\,y^2\,c^{-4} = (\mathfrak{T}\,\frac{1}{2}\varphi)^2$ so ist $1 + e^2\,y^2\,c^{-4} = (1 + (\mathfrak{T}\,\frac{1}{2}\varphi)^2) = (\mathfrak{sec}\,\frac{1}{2}\varphi)^2 = (\cos\frac{1}{2}\varphi)^{-2}$ also $ac(1 + e^2\,y^2\,c^{-4})^{\frac{1}{2}} = ac\,.\,\mathfrak{sec}\,\frac{1}{2}\varphi = ac\cos\frac{1}{2}\varphi^{-1}$ $= a^2\,(1 - e^2\,u^2\,a^{-4})^{\frac{1}{2}}$ oder $(1 - e^2\,u^2\,a^{-4})^{\frac{1}{2}}$ $= c\,a^{-1}\cos\frac{1}{2}\varphi^{-1}$

4°) Da subnorm $\beta : y = y :$ subtang β oder da $PO : PM = PM : PT$ so ist $PT = PM^2\,PO^{-1}$ d. h. $y^2\,.\,(u\,c^2\,a^{-2})^{-1} = y^2\,a^2\,u^{-1}\,c^{-2} =$ subtang β $= (a^2 - u^2)\,u^{-1} = (2a + x)\,x\,(a - x)^{-1} = PT$

Was das dritte Abzuleitende war.

5°) Der subcos β würde also seün

$= (1 + y^2\,a^4\,u^{-2}\,c^{-4})^{-\frac{1}{2}}\,y = y\,.\,(u^2\,c^4 + y^2\,a^4)^{-\frac{1}{2}}\,.$ $uc^2 = yuc^2\,(a^4\,c^2 - a^2\,c^2\,u^2 + u^2\,c^4)^{-\frac{1}{2}}$ $= yuc\,(a^4 - e^2\,u^2)^{-\frac{1}{2}} = yuc\cos\frac{1}{2}\varphi\,a^{-1}\,c^{-1}$ $= yua^{-1}\cos\frac{1}{2}\varphi$ subsin $\beta^2 = y^2 - y^2\,u^2\,c^2\,(a^4 - e^2\,u^2)^{-1} = y^2\,\frac{(a^4 - a^2\,u^2 + u^2\,c^2 - u^2\,c^2)}{a^4 - e^2\,u^2}$

$= y^2\,a^2\,(a^2 - u^2)\,(a^4 - e^2\,u^2)^{-1}$ $= y^4\,a^4\,c^{-2}\,(a^4 - e^2\,u^2)^{-1}$ subsin β $= y^2\,a^2\,c^{-1}\,(a^4 - e^2\,u^2)^{-\frac{1}{2}} = y^2\,ac^{-2}\cos\frac{1}{2}\varphi$

6°) $PM^2 + PT^2 = MT^2 = y^2$ $+ y^4\,a^4\,u^{-2}\,c^{-4} = (u^2\,c^4 + y^2\,a^4)\,.\,u^{-2}\,y^2\,c^{-4}$.

Da

Da nun $y^2 a^2 = c^2 a^2 - c^2 u^2$ so ist MT^2
$= y^2 c^{-4} u^{-2} . (c^2 u^2 c^2 + c^2 a^4 - c^2 u^2 a^2)$
$= y^2 c^{-2} (a^4 - e^2 u^2) u^{-2}$ also tang β
$= y c^{-1} u^{-1} (a^4 - e^2 u^2)^{\frac{1}{2}} = ya(cu)^{-1} (FM . fM)^{\frac{1}{2}}$
$= y u^{-1} a \cos \frac{1}{2} \varphi^{-1}$

Was das vierte Aufzusuchende war.

tang β : norm. $\beta = y c^{-1} u^{-1} (a^4 - e^2 u^2)^{\frac{1}{2}}$:
$c a^{-2} (a^4 - e^2 u^2)^{\frac{1}{2}} = ya^2 : uc^2$ also $ya^2 (uc^2)^{-1}$.
norm β = tang β norm $\beta = (uc)^2 (ya^2)^{-1}$ tang β

7°) OT oder die Sekante vom EllipsenBogen ist gleich der Subtangente plus der Subnormale desselben d. h. $(a^2 - u^2) u^{-1} + uc^2 a^{-2} = (a^2 a^2 - a^2 u^2 + u^2 c^2) u^{-1} a^{-2} = (a^4 - e^2 u^2) . a^{-2} u^{-1}$
$= FM . fM . PC^{-1} = c^2 u^{-1} (\cos \frac{1}{2} \varphi)^{-2}$

Die Sekante ist gleich dem Quotienten mit der Koabszisse in das Faktum aus den Radii-Vektoren dividirt.

8°) AO oder die Quernormale vom EllipsenBogen ist gleich der Subnormale plus der Querabszisse β oder $AO = OP + PA$ nun ist $PO = uc^2 a^{-2}$ und $PA = x = a - u$ also quernorm $\beta = a - u + uc^2 a^{-2}$
$= (a^3 - (a^2 - c^2) u) a^{-2} = (a^3 - e^2 u) a^{-2}$
$= a - e^2 u a^{-2}$

9°) (quernorm $\beta \times$ norm $\beta)^{\frac{1}{2}}$ = norm. med. β
$= (1 - e^2 u a^{-3})^{\frac{1}{2}} . (1 - e^2 u^2 a^{-4})^{\frac{1}{4}} c^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}$

(17) 15) Die Subnormale, Normale, Subtangente, Tangente, Sekante und Quernormale vom ErgänzungsBogen von β zum Quadranten (und zum HalbKreiße) der Ellipse zu suchen.

1°) Da in Fig. 1. $ML = u$, die Ordinate vom Bogen $MD = \alpha = AD - DM = q - \beta$, $LC = MP = y$ = coabsc α, LD = absc. α; so ist Mt = tang α, t der Punkt, wo die TangentenLinie TMt die verlängerte kleine Akse durchschneidet, tL = subtang α, MX = normale α, X der Punkt, wo die Linie MO die verlängerte

kleine

kleine Axe c trift, LX die subnormale α; und $DX = DL + LX = c - y +$ subnorm. $\alpha =$ quernorm α.

2°) Wie Fig. 1. deutlich vor Augen legt, so sind die ΔtML, ΔMTP, ΔtXM sich änlich.

Demnach verhalten sich darin

$TP : PM = LM : Lt$, also $Lt = \frac{PM.LM}{TP} =$ subtang α

$TP : TM = ML : Mt$, also $Mt = \frac{TM.LM}{TP} =$ tang α

$PO : PM = LM : LX$, also $LX = \frac{PM.LM}{PO} =$ subnorm. α

$PM : MT = LM : MX$, also $MX = \frac{MT.LM}{PM} =$ norm. α

3°) subtang $\alpha = y \cdot u (y^2 a^2 u^{-1} c^{-2})^{-1}$
$= c^2 u^2 y^{-1} a^{-2}$
subtang β : subtang $\alpha = y^2 a^2 u^{-1} c^{-2} : c^2 u^2 y^{-1} a^{-2}$
$= y^3 a^4 : u^3 c^4$

4°) tang $\alpha = y (cu)^{-1} (a^4 - e^2 u^2)^{\frac{1}{2}} \cdot u (y^2 a^2 u^{-1} c^{-2})^{-1} = (a^4 - e^2 u^2)^{\frac{1}{2}} \cdot uc (y a^2)^{-1}$
$= uc (ya)^{-1} (FM . fM)^{\frac{1}{2}} =$ cotang $\alpha\, u^2 c^2 (y^2 a^2)^{-1}$
$= uc^2 (ya)^{-1} \cos \frac{1}{2} \varphi^{-1}$.
tang $\alpha = u^2 c^2 y^{-2} a^{-2}$ tang β, tang β : tang α
$= y^2 a^2 : u^2 c^2$

5°) subnorm $\alpha = yu (uc^2 a^{-2})^{-1} = ya^2 c^{-2}$
subnorm β : subnorm. $\alpha = uc^2 a^{-2} : ya^2 c^{-2}$
$= uc^4 : ya^4$

6°) norm $\alpha = y c^{-1} u^{-1} (a^4 - e^2 u^2)^{\frac{1}{2}} . (u) . (y)^{-1} = c^{-1} (a^4 - e^2 u^2)^{\frac{1}{2}}$ norm : $\alpha^2 = u^2 + y^2 a^4 c^{-4} = (c^2 u^2 c^2 + a^2 y^2 a^2) c^{-4}$
$= (c^2 u^2 c^2 + a^4 c^2 - u^2 a^2 c^{-2}) c^{-4} = c^{-2} (a^4 - e^2 u^2) = c^{-2} a^2 c^2 (\cos \frac{1}{2} \varphi)^{-2}$ norm : α
$ac^{-1} (FM . fM)^{\frac{1}{2}} = a (\cos \frac{1}{2} \varphi)^{-1} = (a^2 - y^2 c^{-2} a^2 + y^2$

$+ y^2 a^4 c^{-4})^{\frac{1}{2}} = a(1 + e^2 y^2 c^{-4})^{\frac{1}{2}}$
norm: β : norm $\alpha = c a^{-1} (FM . fM)^{\frac{1}{2}} : a c^{-1} (FM \cdot fM)^{\frac{1}{2}} = c^2 : a^2$

7°) $c^2 u^2 y^{-1} a^{-2} + y a^2 c^{-2} = (c^4 u^2 + y^2 a^4) y^{-1} a^{-2} c^{-2} = (a^4 - e^2 u^2) a^{-2} y^{-1} = \text{sec}\, \alpha$.
d. h. $\text{sec}\, \alpha = \text{sec}(q - \beta) = FM . fM . PM^{-1} = y^{-1} c^2 (\cos \frac{1}{2} \varphi)^{-2}$

Die Sekante des ErgänzungsBogens (einer Ellipse) ist gleich dem Quotienten mit der Ordinate von β in das Faktum aus den beiden RadiiVektoren dividirt.

8°) subcosin: $\alpha = (1 + c^4 u^2 y^{-2} a^{-4})^{-\frac{1}{2}} u = u y a^2 (y^2 a^4 + c^4 u^2)^{-\frac{1}{2}} = u y a^2 (a^4 - e^2 u^2)^{-\frac{1}{2}} c^{-1} = a^{-1} c^{-2} y u a^2 \cos \frac{1}{2} \varphi = y u a c^{-2} \cos \frac{1}{2} \varphi$;

$$\text{subsin}\, \alpha = \left(u^2 - \frac{u^2 y^2 a^4}{(a^4 - e^2 u^2) c^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$= (u^2 c^2 a^4 - e^2 u^4 c^2 - u^2 y^2 a^4)^{\frac{1}{2}} . (a^4 - e^2 u^2)^{-\frac{1}{2}} c^{-1} = u (y^2 a^4 + c^4 u^2 - y^2 a^4)^{\frac{1}{2}} (a^4 - e^2 u^2)^{-\frac{1}{2}} c^{-1} = c u^2 (a^4 - e^2 u^2)^{-\frac{1}{2}} = u^2 a^{-1} \cos \frac{1}{2} \varphi$

9°) quernorm $\alpha = c - y +$ subnorm $\alpha = c - y + y a^2 c^{-2} = (c^3 + (a^2 - c^2) y) c^{-2} = (c^3 + e^2 y) c^{-2} = c + e^2 c^{-2} y = c + e \cos \frac{1}{2} \varphi$

ε°) norm. med. $\alpha = (\text{norm}\, \alpha . \text{quernorm.}\, \alpha)^{\frac{1}{2}} = [a(1 + e^2 y^2 c^{-4})^{\frac{1}{2}} (c + e^2 y c^{-2})]^{\frac{1}{2}} = (ac)^{\frac{1}{2}} . (1 + e^2 y^2 c^{-4})^{\frac{1}{4}} (1 + e^2 y c^{-3})^{\frac{1}{2}} =$

Man hätte also in den rücksichtlichen Ausdrücken für die Normale, Subnormale, Quernormale, mittlere Normale, Tangente, und Subtangente auch Sekante, für den Subsinus und Subkosinus der sich zum Quadranten einer

Ellipse

Ellipse ergänzenden Bögen nur ihre Ordinaten mit ihren Koabszißen, diese mit jener, und die Halbmesser a und c, auf denen sie stehen, mit einander zu verwechseln, wie in $y^2 c^{-2} = 1 - u^2 a^{-2}$ und $u^2 a^{-2} = 1 - y^2 c^{-2}$ und man bekäm die Ausdrücke für jeglicher gleichnamigen Linie.

c°) Setzt man in diese sämmtlichen Formeln für die Norm., Subnorm., Tang., Subtangente von Ellipsen-Bögen. $c = a$ das heißt verwandelt sich die Ellipse in den Kreis, so wird $e = o$ und die Normalen werden zu Halbmessern, die Subnormalen zu Kosinußen, die Tangenten zu Tangenten, die Subtangenten zur Differenz zwischen Sekante und Kosinus.

(18) 16. Die Subtangente, Tangente, Subnormale und Normale der (einfachen) Parabel zu bestimmen.

In Fig. 2. ist $\angle FMO = \frac{1}{2}\varphi$ oder $\angle Fmo = \frac{1}{2}\varphi$ und der $\angle PMO = \mu \lessgtr \frac{1}{2}\varphi$, wenn $PM = y \lessgtr$ als der halbe Parameter $= a$ ist oder $\angle PMO = \mp \angle PMF \overset{+}{+} \angle FMO$ wenn $FP = \mp \frac{1}{2}a \pm x = \mp AF \pm AP$ ist.

Dann ist aber $\mathfrak{T}(\mp\mu \overset{+}{+} \frac{1}{2}\varphi) = y^{-1} \operatorname{tang}(\mp\mu \overset{+}{+} \frac{1}{2}\varphi) = PO.PM^{-1}$

2°) Es ist aber nach (10. (12.) 8°) . . $\mathfrak{T}(\pm\frac{1}{2}\varphi) = \pm y a^{-1}$ und $\mathfrak{T}(\mp\mu) = \mp \frac{\mp a \pm 2x}{2y}$ Oder

$\mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi = \pm y a^{-1}$ wenn $\frac{1}{2}\varphi \gtrless \mu$ und $\mathfrak{T}(\mu) = \frac{2x - a}{2y}$ wenn $\mu < \frac{1}{2}\varphi$; $= \frac{a - 2x}{2y}$ wenn $\mu > \frac{1}{2}\varphi$ ist.

Im ersten Fall ist y^{-1} subnorm: $\beta = \mathfrak{T}(\frac{1}{2}\varphi - \mu) = (\mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi - \mathfrak{T}\mu)(1 + \mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi\,\mathfrak{T}\mu)^{-1} = [y a^{-1} - (2x - a)(2y)^{-1}] . [1 + y a^{-1} (2x - a)(2y)^{-1}]^{-1} = (2y^2 - 2ax + a^2)(2ay)^{-1} [2a + 2a - a]^{-1} 2a = (4ax - 2ax + a^2)[y(a + 2x)]^{-1} = a(2x + a)[y(a + 2x)]^{-1} = a y^{-1}$

y^{-1} subnorm: $\beta = a y^{-1}$ also Subnormale $= a$

Im

Im zweiten Fall subnorm: $\beta = y\,\mathfrak{T}(\mu + \frac{1}{2}\varphi)$.
Dann ist $\mathfrak{T}(\mu+\frac{1}{2}\varphi)=(\mathfrak{T}\mu+\mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi)(1-\mathfrak{T}\mu\,\mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi)^{-1}$
Hier $\mathfrak{T}\mu = (a-2x)(2y)^{-1}$ und $\mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi = y\,a^{-1}$.
$\mathfrak{T}(\mu + \frac{1}{2}\varphi) = [(a-2x)(2y)^{-1} + ya^{-1}]$
$(1 - ya^{-1}(2y)^{-1}.(a-2x))^{-1} = (a^2 - 2ax + 2y^2)(y.2a)^{-1}(2a - a + 2x)^{-1}2a = (a^2+2ax).y^{-1}(a+2x)^{-1} = ay^{-1} = y^{-1}$.
subnorm: β, Und also wiederum subnorm: $\beta = a$.

3°) Also y mag $\gtrless$ a seün, so ist doch subnorm: (arc: parab: β) = a dem halben Parameter stets gleich.

4°) norm: $\beta^2 = PM^2 + PO^2 = y^2 + a^2 = 2ax + a^2 = a(a+2x) = 2a.FM$, norm: $\beta = a^{\frac{1}{2}}(a+2x)^{\frac{1}{2}} = (2a)^{\frac{1}{2}}(FM)^{\frac{1}{2}}$
quernorm β = PO + PA = abscis β + subnorm β
$= x + a = y^2(2a)^{-1} + a = (2a^2 + y^2)(2a)^{-1}$
Mithin quernorm $\beta \times$ norm $\beta = (a+x)\,a^{\frac{1}{2}}(a+2x)^{\frac{1}{2}}$
= norm. med. β^2 norm. med. $\beta = a(1+xa^{-1})^{\frac{1}{2}}.(1+2xa^{-1})^{\frac{1}{4}}$
Es ist also die Normale eines paraboliſchen Bogens gleich der $\frac{1}{2}$ten Potenz aus dem Faktum vom ganzen Parameter in den RadiusVektor des Bogens.

5°) PO: PM = PM: PT oder a: y = y: subtang β
subtang $\beta = y^2 a^{-1} = 2ax\,a^{-1} = 2x$ Oder die Subtangente eines ParabelBogens, welcher senkrecht auf der AksLinie aufsteht, ist gleich seiner doppelten Abszise vom Scheitel ausgerechnet.

6°) $$\text{subcos}\,\beta = \frac{2}{(y^2+4x^2)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{y^4}{y^2+4x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{4a^2x^2}{2ax+4x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2x}{a+2x}\right)^{\frac{1}{2}}a$$
$$= \left(\frac{y^4a^2}{a^2y^2+y^4}\right)^{\frac{1}{2}} = ya(a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= y$$

$= y(1 + y^2 a^{-2})^{-\frac{1}{2}}$

$\text{subsin}\,\beta = (y^2 y^2 + 4x^2 y^2 - y^4)^{\frac{1}{2}} (y^2 + 4x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= y\left(\frac{2x}{a + 2x}\right)^{\frac{1}{2}} = y\left(\frac{y^2}{a^2 + y^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= y^2 (a^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$

7°) $PT^2 + PM^2 = MT^2 = 4x^2 + y^2$

$= 4x^2 + 2ax = 2x(a + 2x) = (y^4 + y^2 a^2) a^{-2}$

$= (y^2 + a^2) y^2 a^{-2}$

$\text{tang}\,(\text{arc:parab:}\beta) = (2x)^{\frac{1}{2}} (a + 2x)^{\frac{1}{2}}$

$= y a^{-1} (a^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = y(1 + y^2 a^{-2})^{\frac{1}{2}}$

Die Tangente eines ParabelBogens β ist also gleich der $\frac{1}{2}$ten Potenz aus dem Faktum von, Subtangente multiplizirt in RadiusVektor; oder gleich der Subsekante β.

8°) Folglich ist $TO = TP + PO = 2x + a$ d. h. gleich dem doppelten RadiusVektor.

(19) 17) Die Subtangente, Tangente, Subnormale, Normale, Quernormale, mittlere Normale, Sekante, der Subkosinus und Subsinus eines HüperbelBogens in Funktionen von grosser und kleiner halber Akse, von Ordinate und von Abszisse aus dem MittelPunkte, zu finden.

1°) In Fig. 3. seü der $\angle PMf = \mu$ und da $Pf = PC + Cf = u + e$ so ist $\mathfrak{T}\mu = (u + e) y^{-1}$

$= Pf . PM^{-1}$

$\angle TMf = \frac{1}{2}\angle FMf = \frac{1}{2}\psi$ und $\mathfrak{T}\frac{1}{2}\psi = \mathfrak{Kot}\frac{1}{2}\angle FMG$

$= \mathfrak{Kot}\frac{1}{2}\varphi = c^2 y^{-1} e^{-1}$ (nach (14) 12, 2° und 3°).

Nun ist aber $\angle PMT = \angle PMf - \frac{1}{2}\angle FMf = \mu - \frac{1}{2}\psi$, also ist $PT = \text{tang}(\mu - \frac{1}{2}\psi) = y\,\mathfrak{T}(\mu - \frac{1}{2}\psi)$. Bekanntlich ist aber $\mathfrak{T}(\mu - \frac{1}{2}\psi) = (\mathfrak{T}\mu - \mathfrak{T}\frac{1}{2}\psi)(1 + \mathfrak{T}\mu\mathfrak{T}\frac{1}{2}\psi)^{-1}$ und da $\mathfrak{T}\mu = (u + e) y^{-1}$ auch $\mathfrak{T}\frac{1}{2}\psi = c^2 y^{-1} e^{-1}$ so ist $\mathfrak{T}(\mu - \frac{1}{2}\psi) = [(u + e) y^{-1} - e^{-1} c^2 y^{-1}] . [1 + (u + e) y^{-1} c^2 e^{-1} y^{-1}]^{-1}$

$\mathfrak{T}(\mu - \frac{1}{2}\psi) = (ue + e^2 - c^2)\, c^{-1}\, y^{-1}\, (ey^2 + uc^2 + ec^2)^{-1}\, ey^2$
$= (ue + a^2)\, y\, (eu^2 c^2 a^{-2} - ec^2 + uc^2 + ec^2)^{-1}$
$= (ue + a^2)\, y\, a^2\, u^{-1} c^{-2} (eu + a^2)^{-1}$
$= y\, a^2\, u^{-1} c^{-2}$

Also $PT = \text{tang}(\mu - \frac{1}{2}\psi) = y\, \mathfrak{T}(\mu - \frac{1}{2}\psi) = y^2 a^2 u^{-1} c^{-2}$ Oder $\text{subtang}\,\beta = y^2 a^2 u^{-1} c^{-2}$

2°) $PT : PM = PM : PO$ oder
$PO = y^2 (y^2 a^2 u^{-1} c^{-2})^{-1}$ $\text{subnorm} : \beta = uc^2 a^{-2}$

Bei der Hyperbel ist ebenfalls $(e^2 u^2 - a^4) = (1 + e^2 y^2 c^{-4})\, a^2 c^2$ und $e^2 y^2 c^{-4} = (\mathfrak{T} \frac{1}{2}\varphi)^2$ also $(c^2 u^2 - a^4) = (1 + e^2 y^2 c^{-4}) a^2 c^2 = (1 + (\mathfrak{T} \frac{1}{2}\varphi)^2) \cdot a^2 c^2 = (\text{ſes} \frac{1}{2}\varphi)^2 a^2 c^2 = a^2 c^2 (\cos \frac{1}{2}\varphi)^{-2}$

3°) $TM^2 = PT^2 + PM^2 = y^4 a^4 u^{-2} e^{-4} + y^2 = y^2 u^{-2} c^{-4} (y^2 a^4 + u^2 c^4) = (a^2 c^2 u^2 - a^4 c^2 + u^2 c^4) y^2 u^{-2} c^{-4} = (e^2 u^2 - a^4) y^2 c^{-2} u^{-2}$ und da $(e^2 u^2 - a^4) a^{-2} = FM \,.\, fM$ ſo iſt
$\text{tang}\,\beta = yau^{-1} c^{-1} (FM \,.\, fM)^{\frac{1}{2}} = yc^{-1} u^{-1} (e^2 u^2 - a^4)^{\frac{1}{2}} = y\, u^{-1}\, a \cos \frac{1}{2}\varphi^{-1}$

4°) $MO^2 = PM^2 + PO^2 = y^2 + u^2 c^4 a^{-4} = (y^2 a^4 + u^2 c^4) a^{-4} = (a^2 u^2 c^2 - a^4 c^2 + u^2 c^4) a^{-4} = c^2 (u^2 e^2 - a^4) a^{-4} = c^2 a^{-2} (FM \,.\, fM)$ $\text{norm}\,\beta = ca^{-2} (u^2 e^2 - a^4)^{\frac{1}{2}} = ca^{-1} (FM \,.\, fM)^{\frac{1}{2}} = c^2 a^{-1} \cos \frac{1}{2}\varphi^{-1}$

5°) $\text{ſec}\,\beta = OT = OP + PT = \text{subnorm} : \beta + \text{subtang}\,\beta = uc^2 a^{-2} + y^2 a^2 u^{-1} c^{-2} = (u^2 c^4 + y^2 a^4) u^{-1} c^{-2} a^{-2} = (c^2 u^2 c^2 + a^2 u^2 c^2 - a^4 c^2) u^{-1} c^{-2} a^{-2} = (e^2 u^2 - a^4) u^{-1} a^{-2} = FM \,.\, fM \,.\, u^{-1} = \text{ſecant}\,\beta = u^{-1} (\cos \frac{1}{2}\varphi)^{-2} c^2$

6°) Da $\text{tang}\,\beta = \text{subſec}\,\beta = yc^{-1} u^{-1} (e^2 u^2 - a^4)^{\frac{1}{2}}$ und $\text{subcoſin.}\,\beta = y^2\, \text{subſec}\,\beta^{-1}$ ſo iſt $\text{subcoſin}\,\beta = yuc$

$= y u c (e^2 u^2 - a^4)^{-\frac{1}{2}} = y u a^{-1} \cos \frac{1}{2}\varphi$ subsin β

$= y \left(1 - \frac{u^2 c^2}{e^2 u^2 - a^4} \right)^{\frac{1}{2}} = y \left(\frac{e^2 u^2 - a^4 - u^2 c^2}{e^2 u^2 - a^4} \right)^{\frac{1}{2}}$

$= y \left(\frac{a^2 u^2 + c^2 u^2 - a^4 - u^2 c^2}{e^2 u^2 - a^4} \right)^{\frac{1}{2}} = y a \left(\frac{u^2 - a^2}{e^2 u^2 - a^4} \right)^{\frac{1}{2}}$

$= y a \left(\frac{a^2 y^2 c^{-2}}{e^2 u^2 - a^4} \right)^{\frac{1}{2}}$ $a^2 y^2 c^{-1} (e^2 u^2 - a^4)^{-\frac{1}{2}} =$

subsin $\beta = y^2 \cos \frac{1}{2}\varphi \, a c^{-2}$

7°) quernorm: $\beta =$ subnorm. $\beta +$ absc. $\beta =$
$u c^2 a^{-2} + u - a = (u (c^2 + a^2) - a^3) a^{-2} = (e^2 u - a^3) a^{-2}$
$= e^2 u a^{-2} - a$ norm. med. $\beta =$ [quernorm $\beta \times$
norm $\beta]^{\frac{1}{2}} = (e^2 u a^{-3} - 1)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} (u^2 e^2 a^{-4} - 1)^{\frac{1}{4}}$
$= (ac)^{\frac{1}{2}} [(u e^2 a^{-3} - 1)^2 (u^2 e^2 a^{-4} - 1)]^{\frac{1}{4}}$

8°) Wenn in der gleichseitigen Hüperbel $a = c$ ist, wird subtang $\beta = y^2 a^2 u^{-1} c^{-2} = y^2 u^{-1}$

subnorm $\beta = u c^2 a^{-2} = u$ gleich der Abszise aus dem MittelPunkt, auch $y^2 = c^2 a^{-2} (u^2 - a^2) = u^2 - a^2$

tang $\beta = y c^{-1} u^{-1} (e^2 u^2 - a^4)^{\frac{1}{2}} = y u^{-1} a^{-1} (2u^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} a$
$= y u^{-1} (2 u^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} = y u^{-1} (u^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$
$= y u^{-1} (2 y^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}$

norm $\beta = c a^{-2} (u^2 e^2 - a^4)^{\frac{1}{2}} = (2 u^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} =$
$(2 y^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}$

secant $\beta = (e^2 u^2 - a^4) u^{-1} a^{-2} = (2 u^2 - a^2) u^{-1}$

subcos $\beta = y u c (e^2 u^2 - a^4)^{-\frac{1}{2}} = y u (2 u^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$

subsin $\beta = a^2 y^2 c^{-1} (e^2 u^2 - a^4)^{-\frac{1}{2}} = y^2 (2u^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$

quernorm: $\beta = e^2 u a^{-2} - a = 2 a^2 u a^{-2} - a$
$= 2u - a = u + x$

norm:

norm: med $\beta = (a\,c)^{\frac{1}{2}} [(u e^2 a^{-3} - 1)^2 (u^2 e^2 a^{-4} - 1)]^{\frac{1}{4}}$,

$= a[(2ua^{-1} - 1)^2 (2u^2 a^{-2} - 1)]^{\frac{1}{4}}$

18) Die Formeln oder Funktionen für Sekanten, Subsinusse, Subkosinusse, Subtangenten, Mittelnormalen, Subnormalen, Quernormalen, Tangenten und Normalen der zugefügten Hüperbel (*hyperbolarum conjunctarum*), wo der AssümptotenWinkel die Ergänzung zu zwei rechten zum AssümptotenWinkel der andern Hüperbel abgiebt, oder wo die halbe große Akse oder a auf der halben kleinen Akse oder auf c senkrecht am Scheitel aufsteht und diese in der AksLinie liegt, zu finden.

1°) v bedeute die Abszise aus dem MittelPunkt C, und w die am Ende von dieser senkrecht aufstehende Ordinate der zugefügten Hüperbel.

Dann ist die allgemeine Funktion für die Ordinate aus der Abszise $w^2 a^{-2} = v^2 c^{-2} - 1$ wie in der Kohüperbel $y^2 c^{-2} = u^2 a^{-2} - 1$ also $u^2 a^{-2} - y^2 c^{-2} = 1 = v^2 c^{-2} - w^2 a^{-2}$; $u^2 a^{-2} + w^2 a^{-2} = y^2 c^{-2} + v^2 c^{-2}$ Wird $u = w$ so ist $2u^2 a^{-2} = y^2 c^{-2} + v^2 c^{-2}$, $2u^2 a^{-2} - y^2 c^{-2} = v^2 c^{-2}$ und da $w^2 a^{-2} = u^2 a^{-2} = y^2 c^{-2} + 1$ auch $y^2 c^{-2} = u^2 a^{-2} - 1 = w^2 a^{-2} - 1$ so wäre $w^2 a^{-2} + 1 = v^2 c^{-2} = u^2 a^{-2} + 1$, $v^2 c^{-2} - 1 = u^2 a^{-2} = w^2 a^{-2}$; auch $v^2 c^{-2} = y^2 c^{-2} + 2$ $y^2 c^{-2} = v^2 c^{-2} - 2$

Wird aber $y^2 c^{-2} = v^2 c^{-2}$, so wäre $u^2 a^{-2} + w^2 a^{-2} = 2y^2 c^{-2} = 2v^2 c^{-2}$, und mithin $y^2 c^{-2} + 1 + w^2 a^{-2} = 2y^2 c^{-2}$, $w^2 a^{-2} + 1 = y^2 c^{-2}$; auch $-u^2 a^{-2} + 2u^2 a^{-2} + 2 = w^2 a^{-2} = u^2 a^{-2} + 2$; $u^2 a^{-2} = w^2 a^{-2} - 2$;

In dieser zugefügten Hüperbel ist infofern die 2te Potenz der Ordinate gleich der 2ten Potenz der Abszise aus dem MittelPunkt C plus dem 2fachen der 2ten Potenz von der halben großen Akse a (d. h. $w^2 = u^2 + 2a^2$) von

jener,

jener, wiefern daselbst die Abszisse aus dem MittelPunkt C gleich der Ordinate von dieser ersten gesetzt wurde.

Und wiefern in dieser zugefügten Hüperbel die Ordinate gleich der Abszisse aus dem MittelPunkt von jener Kohüperbel ist, insofern ist die 2te Potenz der Ordinate y von jener plus dem 2fachen der 2ten Potenz der halben kleinen Akse c.

Auch können Gleichungen dargestellt werden, wenn die Vergleichung oder Gleichsetzung auf den Assümptoten geschieht und z. B. die Abszisse auf der AssümptotenLinie für beide KohüperbelBögen gemeinsam genommen wird. Doch davon zu einer andern Zeit und an einem andern Orte.

Wenn α den arc. hyp. conjunct. bedeutet, wenn β den des andern bedeutet, so wird, wenn v = absc. ex centro C arc. α und w = ordin. arc. α, so wird man nur α statt β, v statt u, w statt y, c statt a und a statt c in allen den für den Bogen β gefundenen Ausdrücken zu setzen haben.

$$\text{secant}\,\alpha = (e^2 v^2 - c^4)\, v^{-1} c^{-2} = {}'F'M.{}'f'M.v^{-1}$$

$$\text{subcos}\,\alpha = w v^2 a (e^2 v^2 - c^4)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{subsin}\,\alpha = c^2 w^2 a^{-1} (e^2 v^2 - c^4)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{norm}\,\alpha = ac^{-2}(v^2 e^2 - c^4)^{\frac{1}{2}} = a c^{-1} ({}'F'M.{}'f'M)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{tang}\,\alpha = w c v^{-1} a^{-1} ({}'F'M.{}'f'M)^{\frac{1}{2}}$$

$$= w a^{-1} v^{-1} (e^2 v^2 - c^4)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{subnorm.}\,\alpha = v a^2 c^{-2}; \quad \text{quernorm}\,\alpha = e^2 v c^{-2} - c$$

$$\text{subtang}\,\alpha = w^2 c^2 v^{-1} a^{-2};$$

$$\text{norm. med}\,\alpha = (ac)^{\frac{1}{2}} [(v e^2 c^{-3} - 1)^2 . (v^2 e^2 c^4 - 1)]^{\frac{1}{4}}$$

Jenachdem nun w = u, oder v = y angenommen wird, jenachdem werden auch diese Formeln modifizirt und in Funktionen von y oder u (nach der Substitution) umgewandelt.

19. (21.) Alle diese obigen Untersuchungen und Entwickelungen vorausgesetzt und vorausgehend, so werden die Rektifikationen der Ellipse, Parabel und Hüperbel nicht mehr so schwierig seün, als man denken sollte.

Nach den Sätzen (11) 9, (12) 10, 18 (20) ist der BeugungsWinkel FMf der Stralen oder Radien an der Peri-

Peripherie jenes Kreißes und jener Kurven $= \varphi$ gesetzt und tang $\frac{1}{2}\varphi R^{-1} = \mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi = (c \text{ ord } \beta)c^{-2}$; $= (a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}$. ord β c^{-2} für die Ellipse; $\mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi = e \text{ ord } \beta\ c^{-2} = (a^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} \text{ ord } \beta\ c^{-2}$ für die Hyperbel und $\mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi = \text{ord } \beta\ a^{-1}$, $\frac{1}{2}$ Parameter dividirt in die Ordinate von $\beta = (2x)^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}}$ für die Parabel gefunden worden.

Auch ergab sich die Subtangente des Bogens β für die Ellipse oder subtang. arc. ell. $\beta = y u^{-1} c^{-2} a^2 R = y^2 a^2 u^{-1} c^{-2}$, wenn y als Radius angenommen und alles auf die Einheit reduzirt wurde. Oder

$$\text{sub}\mathfrak{T}\beta = R^{-1}\,\text{subtang. arc. ell. } \beta = y a^2 u^{-1} c^{-2}$$

$$\text{subsin}\,\beta = R^{-1}\,\text{subsin. arc. ell. } \beta = y c^{-1} a^2 (a^4 - e^2 u^2)^{-\frac{1}{2}} = y a (c^4 + e^2 y^2)^{-\frac{1}{2}} = y a c^{-2} (1 + e^2 y^2 c^{-4})^{-\frac{1}{2}} = y c^{-2} (\cos \tfrac{1}{2}\varphi) a$$

$$\text{sub}\mathfrak{T}\beta = R^{-1}\,\text{subtang. arc. hyp. } \beta = y a^2 u^{-1} c^{-2}$$

$$\text{subsin}\,\beta = R^{-1}\,\text{subsin. arc. hyp. } \beta = y a^2 c^{-1} (e^2 u^2 - a^4)^{-\frac{1}{2}} = y a (e^2 y^2 + c^4)^{-\frac{1}{2}} = y a c^{-2} (e^2 y^2 c^{-4} + 1)^{-\frac{1}{2}} = y a c^{-2} \cos \tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\text{sub}\mathfrak{T}\beta = R^{-1}\,\text{subtang arc. par. } \beta = 2xy^{-1} = y a^{-1}$$

$$\text{subsin}\,\beta = R^{-1}\,\text{subsinus arc. par. } \beta = y(a^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} = y a^{-1}(1 + y^2 a^{-2})^{-\frac{1}{2}} = \frac{y}{a} - \frac{1}{2}\frac{y^3}{a^3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{y^5}{a^5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{y}{a}\right)^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(\frac{y}{a}\right)^9$$

u. s. w.

2°) Wiefern eben bei allen Kurven nnd Kreißen ein anderes EinbeugungsGesetz als beim Zirkel statt findet, sofern findet auch nur jener BeugungsWinkel φ an der Peripherie statt: Seine Hälfte ist das mit dem stetigen Nähern oder Fernen der Krümmungen vom BrennPunkte, als gemeinsamen ZentralPunkte, nach stetig wachsenden oder abnemen-

$$= \frac{y(a^2 + ue)R}{(uc^2 - eu^2 + ea^2)} = \frac{yR(a^2 + eu)}{ue^2 - ua^2 + eu^2 + ea^2}$$

$= \frac{yR}{e-u}$ iſt $u > e$ ſo iſt $\frac{y}{e-u}R = -\frac{yR}{u-e}$ und alſo wie es auch ſeün muß, negativ, wenn $\angle AFM >$ als ein rechter Winkel iſt.

4°) Der entgegengeſetzte analütiſche Beweis iſt leicht gefürt. Da $\mathfrak{T}(\angle AFM) = PM \cdot FP^{-1}$ und $\tan g \frac{1}{2}\varphi = yec^{-2}R$

$$R.\mathfrak{T}(\angle AFM - \angle FMO) = R\frac{y(\pm u \mp e)^{-1} - yec^{-2}}{1 + y^2 ec^{-2}(\pm u \mp e)^{-1}}$$

$$= R\frac{y(c^2 \pm e^2 \mp eu)}{(\pm c^2 u \mp c^2 e + y^2 e)} = R\frac{ya^2(a^2 - eu)}{uc^2(a^2 - eu)}$$

$$= \frac{ya^2}{uc^2}R = \tan g(\angle TMP) = TP \text{ (bei der Ellipſe).}$$

Der zweite Fall, wenn $u < e$ und $\angle AFM >$ als ein rechter Winkel iſt, iſt $\mathfrak{T}ang \angle AFM = -\frac{yR}{e-u} = \frac{yR}{u-e}$, mithin bleibt die Entwickelung dieſelbe.

5°) Bei der Hüperbel iſt im erſten Fall, wenn $\angle AFM <$ ein rechter, $\tan g \angle AFM = \frac{yR}{e-u}$ da $e > u$ iſt, im andern Fall iſt hier $u > e$ und alſo auch $\angle AFM >$ als ein rechter, mithin deſſen tang. oder $\tan g(\angle AFM)$

$$= -\left(\frac{yR}{u-e}\right) = +\frac{yR}{e-u}$$ und das Reſultat muß mit dem erſten Fall das gleiche ſeün. Bei der Hüperbel iſt aber $e^2 = a^2 + c^2$ und $y^2 + c^2 = c^2 u^2 a^{-2}$ Dies eingedenk iſt

$$\tan g(\angle AFM - \angle FMO) = \frac{y(e-u)^{-1} - yec^{-2}}{1 + y(e-u)^{-1} yec^{-2}}R$$

$$= R\frac{yc^2 - ye(e-u)}{c^2(e-u) + ey^2} = R\frac{y(c^2 - e^2 + eu)}{(c^2 e + ey^2 - uc^2)}$$

$$= R$$

$= R\frac{y(eu - a^2)a^2}{u(eu - a^2)c^2} = \frac{ya^2}{uc^2}R$; $\frac{y^2a^2}{uc^2} =$
subtang AM = PT.

6°) Bei der Parabel ist der synthetische Beweis
$R\mathfrak{T}(\angle TMP) = 2xy^{-1}R = ya^{-1}R$ und
$\text{tang}\frac{1}{2}\varphi = y^2a^{-1} = R\mathfrak{T}(\angle TMP + \angle\frac{1}{2}\varphi)$
$= R\frac{ya^{-1} + ya^{-1}}{1 - y^2a^{-2}} = \frac{2ya}{a^2 - y^2}R = \frac{2yaR}{a^2 - 2ax}$
$= \frac{2y}{a - 2x}R$ es mag dabei $\angle AFM \gtrless$ als ein rechter Winkel seyn. Im ersten Fall ist bekanntlich $a > 2x$, im andern $2x > a$ dann aber wird überhaupt die Tangente negativ und so giebt $-\frac{2yR}{2x - a}$ wiederum $\frac{2yR}{a - 2x}$.
Der analytische Beweis springt zu leicht hier in die Augen; er unterbleibt daher.

Ie. (23.) Wenn und wiefern aber $\frac{1}{2}\varphi$ zum $n(\frac{1}{2}\varphi) = \frac{n}{2}\varphi$ wird, inwiefern eben arc. curv. AM = β zum $n\beta$ wird; und umgekert, wenn und wiefern β zu $n\beta$ wird, auch $\frac{1}{2}\varphi$ zu $\frac{n}{2}\varphi$ wird, nämlich sich wechselsweise bedingend. (Vordersatz.)

Und da nun erscheint arc. curv. A m = circ. arc. $\angle TMP$ multiplizirt mit PM als angenommener Halbmesser des Zirkels, also $n\beta = n\angle TMP \times R = n\angle TMP \times PM$ (wiefern R = PM gesetzt werden kann) inwiefern
$\text{tang}(\angle AFM - \angle FMO) = \frac{\mathfrak{T}\angle AFM - \mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi}{1 - (\mathfrak{T}\angle AFM \times \mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi)}R$
$= R \times \mathfrak{T}\angle TMP =$ subtang β gefunden wurde.
(Die Kopul.)

So

So und insofern ist und wird σ zu $n\sigma = n(\beta + \frac{1}{2}\varphi)$ $= n\beta + \frac{n}{2}\varphi$ und umgekert $n\beta = n\sigma - \frac{n}{2}\varphi$, auch $\frac{n}{2}\varphi = n\sigma - n\beta$ (Schluß Satz.)

Oder wechselsweise bedingend erreichen die $\angle$ AFM $\angle$ PMO und $\angle$ PMT und so auch ihre Zirkel Bögen $\sigma \times$ PM, $\frac{1}{2}\varphi \times$ PM und $\beta \times$ PM = dem Verhältnis des Bogens der Gekrümmten zu gleichen Momenten ihr nfaches, wie irgend eines von ihnen sein nfaches erreicht.

Es drückte also der Zirkel Bogen, wiefern die Ordinate als dessen Radius zu achten, und dessen Tangente gleich der zugeordneten Subtangente oder dessen Sinus gleich dem zugeordneten Subsinus wäre, das Verhältnis der Grosheit des Bogens der Gekrümmten = β genau aus, oder das Verhältnis der Größe des Bogens der Gekrümmten, welcher auf seiner Axs Linie senkrecht aufstehet, ist durch seine Subtangente *qua* Tangente und durch seinen Subsinus, *qua* Sinus, nach den bekannten und von mir zuerst erwießenen Formeln, den Zirkel-Bogen aus seiner Tangente oder aus seinem Sinus zu finden, gegeben. —

Oder

$$R^{-1}\,\mathrm{tang}\tfrac{n}{2}\varphi = \Big[n\,\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ 2\ 3}\,\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\ 2\ 3\ 4\ 5}\,\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^5 . - + \ldots . + \frac{n(n-1)\ldots(n-4r)}{1\ 2\ \ldots\ (4r+1)}\,\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^{4r+1} - \frac{n(n-1)\ldots(n-4r-2)}{1\ .\ 2\ \ldots\ 4r+3}\,\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^{4r+3}\ \text{u. s. w.}\Big].$$

$$\Big[1 - \frac{n(n-1)}{1\ 2}\,\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\ 2\ 3\ 4}\,\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^4$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6} \mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^6$$

$$+ - \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-4r+1)}{1\ldots 4r} \mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^{4r}$$

$$- \frac{n(n-1)\ldots(n-4r-1)}{1\ldots(4r+2)} \mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^{4r+2} \text{ u. s. w.} \Big]^{-1}$$

$$\mathfrak{T} n\sigma = \Big[n\mathfrak{T}\sigma - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ 2\ 3} \mathfrak{T}\sigma^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\ 2\ 3\ 4\ 5} \mathfrak{T}\sigma^5 - + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-4r)}{1\ 2\ \ldots(4r+1)} \mathfrak{T}\sigma^{4r+1}$$

$$- \frac{n(n-1)\ldots(n-4r-2)}{1\ldots(4r+3)} \mathfrak{T}\sigma^{4r+3} \text{ u. s. w.} \Big].$$

$$\Big[1 - \frac{n(n-1)}{1\ 2} \mathfrak{T}\sigma^2 - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\ 2\ 3\ 4} \mathfrak{T}\sigma^4$$

$$- \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1\ 2\ \ldots\ 6} \mathfrak{T}\sigma^6 - + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-4r+1)}{1\ldots 4r} \mathfrak{T}\sigma^{4r} +$$

$$- \frac{n(n-1)\ldots(n-4r-1)}{1\ldots(4r+2)} \mathfrak{T}\sigma^{4r+2} \text{ u. s. w.} \Big]^{-1}$$

$$\text{sub}\,\mathfrak{T} n\beta = \Big[n\,\text{sub}\,\mathfrak{T}\beta - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ 2\ 3} \text{sub}\,\mathfrak{T}\beta^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\ 2\ 3\ 4\ 5} \text{sub}\,\mathfrak{T}\beta^5 - + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-4r)}{1\ldots(4r+1)} \text{sub}\,\mathfrak{T}\beta^{4r+1}$$

$$- \frac{n(n-1)\ldots(n-4r-2)}{1\ldots(4r+3)} \text{sub}\,\mathfrak{T}\beta^{4r+3} \text{ u. s. w.} \Big].$$

$$\Big[1 - \frac{n(n-1)}{1\ 2} \text{sub}\,\mathfrak{T}\beta^2 - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\ 2\ 3\ 4} \text{sub}\,\mathfrak{T}\beta^4 -$$

$$- \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1\ .\ 2\ .\ \ldots\ .\ 6} \operatorname{sub}\mathfrak{T}\beta^6 + - \ldots.$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-4r+1)}{1\ .\ 2\ .\ \ldots\ .\ 4r} \operatorname{sub}\mathfrak{T}\beta^{4r}$$

$$- \frac{n(n-1)\ldots(n-4r-1)}{1\ .\ 2\ .\ \ldots\ .\ (4r+2)} \operatorname{sub}\mathfrak{T}\beta^{4r+2} \text{ u. s. w.} \Big]^{-1}$$

$$\sin\frac{n}{2}\varphi = n\sin\frac{n}{2}\varphi - \frac{n(n^2-1^2)}{1\ 2\ .\ 3}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^3$$

$$+ \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1\ 2\ .\ 3\ \ 4\ \ 5}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^5 + - \ldots.$$

$$- \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(4r-3)^2)}{1\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ \ldots\ (4r-2)(4r-1)}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^{4r-1} + \text{u. s. w.}$$

$$\sin n\sigma = n\sin\sigma - \frac{n(n^2-1^2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\sin\sigma^3$$

$$+ \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5}\sin\sigma^5 + - \ldots.$$

$$- \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(4r-3)^2)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ \ldots\ (4r-2)(4r-1)}\sin\sigma^{4r-1}$$

$$+ \frac{n(n^2-1^2)\ldots(n^2-(4r-1)^2)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ \ldots\ 4r(4r+1)}\sin\sigma^{4r+1} \text{ u. s. w.}$$

$$\operatorname{subl}\!:n\beta = n\operatorname{subl}\beta - \frac{n(n^2-1^2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\operatorname{subl}\beta^3$$

$$+ \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5}\operatorname{subl}\!:\beta^5 + - \ldots.$$

$$- \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(4r-3)^2)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ \ldots\ (4r-2)(4r-1)}\operatorname{subl}\!:\beta^{4r-1}$$

$$+ \frac{n(n^2-1^2)\ldots(n^2-(4r-1)^2)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ 4r(4r+1)}\operatorname{subl}\beta^{4r+1} \text{ u. s. w.}$$

Somit ist nach obigen Sätzen und den Schlüssen, welche mer als notdürftig von mir scharf erwiesen sind *).

σ . R

*) Siehe Deduktion, rein wissenschaftliche, u. s. w. Leipzig 1800 und oben die Sätze A, B und C in der ersten Abhandlung dieser zweiten Abtheilung.

$$\sigma . R = R . [\Sigma\sigma - \tfrac{1}{3}\Sigma\sigma^3 + \tfrac{1}{5}\Sigma\sigma^5 - \tfrac{1}{7}\Sigma\sigma^7 + \tfrac{1}{9}\Sigma\sigma^9 \text{ u. s. w. ins } \infty] \text{ oder } \sigma . R = R [\sin\sigma + \frac{1 . 1}{2 . 3}\sin\sigma^3 + \frac{1 . 1 . 3 . 3}{2 . 3 . 4 . 5}\sin\sigma^5 + \frac{1 . 1 . 3 . 3 . 5 . 5}{2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7}\sin\sigma^7 + \frac{1 . 1 . 3 . 3 . 5 . 5 . 7 . 7}{2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9}\sin\sigma^9 \text{ u. s. w. ins } \infty];$$

$$\tfrac{1}{2}\varphi . R = R . [\Sigma\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{3}\Sigma\tfrac{1}{2}\varphi^3 + \tfrac{1}{5}\Sigma\tfrac{1}{2}\varphi^5 - \tfrac{1}{7}\varphi^7 + \tfrac{1}{9}\Sigma\tfrac{1}{2}\varphi^9 \text{ u. s. w. ins } \infty]$$

$$\tfrac{1}{2}\varphi . {}'R = [\sin\tfrac{1}{2}\varphi + \frac{1 . 1}{2 . 3}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^3 + \frac{1 . 1 . 3 . 3}{2 . 3 . 4 . 5}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^5 + \frac{1 . 1 . 3 . 3 . 5 . 5}{2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^7 + \frac{1 . 1 . 3 . 3 . 5 . 5 . 7 . 7}{2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^9 \text{ u. s. w. ins } \infty] . R;$$

$$\text{und } {}''R . \beta = {}''R . [\text{sub}\Sigma . \beta - \tfrac{1}{3} . \text{sub}\Sigma\beta^3 + \tfrac{1}{5}\text{sub}\Sigma\beta^5 - \tfrac{1}{7}\text{sub}\Sigma\beta^7 + \tfrac{1}{9}\text{sub}\Sigma\beta^9 \text{ u. s. w. ins } \infty] = R[\text{subsin:}\beta + \frac{1 . 1}{2 . 3}\text{subsin}\beta^3 + \frac{1 . 1 . 3 . 3}{2 . 3 . 4 . 5}\text{subsin:}\beta^5 + \frac{1 . 1 . 3 . 3 . 5 . 5}{2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7} . \text{subsin}\beta^7 + \frac{1 . 1 . 3 . 3 . 5 . 5 . 7 . 7}{2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9}\text{subsin}\beta^9 \text{ u. s. w. ins } \infty]$$

20. (24.) Noch möchten einige Zweifel über die Allgemeingültigkeit unseres Resultates auch von solchen EllipsenBögen, welche auf die kleinste Akse senkrecht aufstehen, obwalten; auch diese sind eben leicht zu heben.

2°) Was bei der Ellipse den Bogen MD als ErgänzungsBogen mit AM zum Quadranten AD derselben betrift, so ist zu bedenken, daß des ∠MFD oder des ergänzenden ZirkelBogens Tangente = der Kotangente vom ∠AFM

∠AFM ist; diese ist positiv oder negativ, wenn und wie ∠AFM ≷ als ein rechter Winkel ist, und im ersten Fall $= + \frac{u - e}{y} = \frac{CP - CF}{PM}$ und im zweiten

$$= - \frac{e - u}{y} = + \frac{u - e}{y}.$$

3°) Die Kotangente ist also stets $= + \frac{u - e}{y} =$ Tangente von der Ergänzung. Es erscheint aber der Bogen MD ähnlich und gleich einem ZirkelBogen, dessen Tangente = der Kotangente vom Bogen des ∠AFM *plus* dem Bogen $\frac{1}{2}\Phi$ dessen Tangente $= eyc^{-2}R$, mit den RadiusVektor FM beschrieben.

Alles dies ob der stetigen geänderten, vom Punkt oder Scheitel *D* ausgehenden, stumpfern Krümmung als die beim ZirkelBogen. — —

4°) Also $R\mathfrak{T}mD = \frac{\text{Kot.}\angle AFM + \mathfrak{T}\frac{1}{2}\Phi}{1 - \text{Kot}\angle AFM \times \mathfrak{T}\frac{1}{2}\Phi} R$

$$= \frac{(u-e)y^{-1} + eyc^{-2}}{1 - (u-e)y^{-1}eyc^{-2}} R = R\frac{c^2u - c^2e + ey^2}{y(c^2 - eu + e^2)}$$

$$= \frac{c^2u(a^2 - eu)}{ya^2(a^2 - eu)} R = \frac{uc^2}{ya^2} R$$

Umgekert ist

5°) $R\,\text{Kot}\angle AFM = \frac{\text{sub}\,\mathfrak{T}x \pm \mathfrak{T}\frac{1}{2}\Phi}{1 \mp \text{sub}\,\mathfrak{T}x\,\mathfrak{T}\frac{1}{2}\Phi} R$

$$= \frac{uc^2y^{-1}a^{-2} \pm eyc^{-2}}{1 \pm uc^2y^{-1}a^{-2}(eyc^{-2})} R = \frac{uc^4 \pm ey^2a^2}{y(c^2a^2 \mp euc^2)} R$$

$$= \frac{c^2(uc^2 \pm ea^2 \mp eu^2)}{yc^2(a^2 \mp eu)} R = \frac{ua^2 - e^2u \pm ea^2 \mp eu^2}{y(a^2 \mp eu)} R$$

$= R\frac{u - e}{y}$; (= u — e wo R = y): was zu erweißen war.

6°)

6°) Oder viel kürzer, da MD = Quadr — AM so ist tang MD = cot AM, diese ist aber wie TP : PM = PM : cot AM; cot. AM = $PM^2\ TP^{-1} = y^2\ a^2\ u^{-1}\ c^{-2} : y = y : \cot AM$; cot AM = $u\ c^2\ a^{-2}$ = subnorm: von AM.

7°) Der EllipsenBogen BM ist die Ergänzung des Bogens AM zum HalbKreis der Ellipse, ersterer wird von B aus mit dem stets zunemenden RadiusVektor fM beschrieben; dann ist die Tangente dieser stumpfen ∠Oefnung am Fokus f die negative (ob der Stumpfheit des ∠MfB) Tangente vom ∠MfA und gleich $-\frac{y}{e+u}$ zu setzen.

Da der Bogen BM von B aus bis zu D spitzwinklicht sich stetig krümmt, am Punkt D das Maksimum seines Krümmens erreichte und nun, von D aus in das entgegengesetzte, nämlich ins stumpfwinklichte, Krümmen übergeht und fortgehet, und dadurch soviel von seinem Maksimum seines spitzwinklichten Krümmens aufhebt, als der Bogen DM seiner Größe nach als eine stumpfwinklichte Krümmung aufzuheben vermag, so ist nur das, was der $\frac{1}{2}\angle FMf = \frac{1}{2}\varphi$ ausdrückt, als herausgepreßtes, stetig herausgedrücktes Stück vom ZirkelBogen mit fM beschrieben beim EllipsenBogen BM (von gleicher ∠Oefnung BfM) zu betrachten. Demnach wird die Größe des EllipsenBogens BM, beschrieben durch den von a — e bis zu a — uea^{-1} stetig wachsenden RadiusVektor, im Verhältnis eines ZirkelBogens, von gleichem größten Radius (der Normale) beschrieben, stehen, der die Differenz zwischen dem ZirkelBogen fM . ($\angle BfM - fM : \frac{1}{2}\varphi$) oder von der ∠Oefnung ($\angle BfM - \frac{1}{2}\angle fMF$) deren Tangente = der Tangente von ($\angle BfM - \frac{1}{2}\varphi$) ist; die Rechnung, wie folgt, ergiebt auch die negative Subtangente von AM zur Subtangente von BM

$$\mathfrak{T}(\angle BfM - \tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{\mathfrak{T}\angle BfM - \mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi}{1 + \mathfrak{T}\angle BfM \,.\, \mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi}$$

$$= \frac{(-y(e+u)^{-1}) - \cdot\, euc^{-2}}{1 + eyc^{-2}(-y(e+u)^{-1})}$$

$$= \frac{-y(c^2 + e^2 + eu)}{c^2 e + e^2 u - ey^2}$$

$$= -y$$

nemenden Stralen gleichsam vom gleichen Zirkel-Umfang abgetriebene, abgeschiedene oder herausgepreßte Stück (oder umgekert hereingeschluckte Stück).

Bei der Ellipse ist die eine Hälfte von φ dem Bogen AM, die andere dem Bogen BM angehörig, wo FM und fM die beiden bedingenden Radii-Vektoren sind. Gegentheils ist beim Bogen DM die Hälfte von φ das dem Bogen-Umfange eines Zirkel-Bogens stetig hinzugefügte, geeinte, aggregirte Stück, ob der stetigen stumpfwinklichten (oder stumpfern) Krümmung als bei gleicher Zirkel-Krümmung am gleichen Zentral-Punkt von gleicher ∠Oefnung.

3°) Der Bogen AM würde einem Zirkel-Bogen gleichen, wo $\frac{\pm e \mp u}{y}$. Das Verhältnis der Größe seiner Tangente ausdrückte, so aber erscheint er nur einem Zirkel-Bogen gleich, wovon zwar $(\pm e \mp u)y^{-1}$ als Tangente für die Größe des Winkels am ekszentrischen Zentral-Punkte, aber nicht für die Tangente der Größe der Bewegung zu achten wäre, welcher eben gleich diesem Winkel-Bogen von der Tangente $= R(\pm e \mp u)y^{-1}$ weniger dem Bogen $\frac{1}{2}\varphi R$ wäre, oder er erscheint gleich im Verhältnis eines Winkel-Bogens, dessen Tangente gleich der Tangente vom $\angle AFM - \frac{1}{2}\angle FMf$ wäre. Gegentheils erscheint er auf dem Zentral-Punkt C bezogen einem Zirkel-Bogen gleich, dessen Tangente $= yu^{-1}$ wäre. Es ist aber dieser Differenz-Winkel gleich dem $\angle PMT = \angle AOM$, dessen Tangente auf den Radius $= 1$ reduzirt,

$= (y^2 a^2 u^{-1} c^{-2}) y^{-1} = PT \,.\, PM^{-1} = y a^2 u^{-1} c^{-2}$

gefunden wird und worden ist.

Bei der eigentlichen Bestimmung der waren Größe des Kurven-Bogens müssen noch merere Umstände erwogen werden, diese weitere Erwägung findet weiter unten statt.

4°) Oder da das Krümmen Ein in jedem Momente stetiges (d. h. gleicheinförmiges) ist — denn unstetige, oder unregelmäßige Krümmungen können eben ob ihrer Unregelmäßigkeit, Unstetigkeit kein Gegenstand der berechnenden Raumlere, d. i. der analütischen Geometrie, jemals werden und seün, — so muß auch der Beugungs-Win-

Winkel φ an der Peripherie einer stetigen Zu- oder Abname im geraden Verhältnis der stetigen Zu- oder Abnahme des KrümmungsBogens unterworfen seün; d. h.

1ε. (22.) Er, der BeugungsWinkel an dem Bogen muß sein 2faches oder 3faches oder nfaches von dem Punkt an erreichen, wie und wo der Bogen der Krümmung sein 2faches, oder 3faches, oder nfaches erreicht; er muß da o oder ∞ (Null oder Unendlich) seün, wie und wo dieser o oder ∞ ist; er muß, was der zweite Fall seün kann, da sein Größtes erreichen, wo dieser sein Kleinstes erreicht, wenn dessen AusgangsPunkt jenem entgegen liegt. —

2°) Denn da $\text{tang}\angle\beta = \mathfrak{T}\text{ang}\angle TMP = \text{subtang}\,\beta = y^2 a^2 u^{-1} c^{-2}$ und $\text{tang}\frac{1}{2}\varphi = y^2 c^{-2} e = (\mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi)\,y$

so ist $\text{tang}\angle(\beta + \frac{1}{2}\varphi) = \dfrac{\mathfrak{T}\beta + \mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi}{1 - \mathfrak{T}\beta\,\mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi} R$

$= \dfrac{y a^2 u^{-1} c^{-2} + y e c^{-2}}{1 - y^2 a^2 e u^{-1} c^4} R = \dfrac{c^2 y (a^2 + ue)}{(c^4 u - y^2 a^2 e)} R$

$= \dfrac{y c^2 (a^2 + eu) R}{c^2 u c^2 - e a^2 c^2 + e u^2 c^2} = \dfrac{y (a^2 + eu) R}{(u c^2 - e a^2 + e u^2)}$

$=$ tang$(\beta + \frac{1}{2}\varphi)$; und wenn $\beta =$ ell. arc. wird, indem $a^2 - e^2$ statt c^2 in die letzte Gleichung gesetzt wird.

$\text{tang}(\beta + \frac{1}{2}\varphi) = \dfrac{y R (a^2 + eu)}{(u a^2 - u e^2 - e a^2 + e u^2)}$

$= \dfrac{y R}{\mp u \mp e}$ und da $\dfrac{y R}{\mp u \mp e} = \dfrac{PM}{FP} R =$

$= R\,\mathfrak{T}\angle MFA$, so ist auch

$R\,\mathfrak{T}(\beta + \frac{1}{2}\varphi) = \text{tang}\angle MFA$; $\angle(AM + \frac{1}{2}\varphi)PM$

$= PM\angle MFA =$ y circ. arc $\angle MFA$.

3°) Bei der Hüperbel ist $y^2 a^2 = u^2 c^2 - a^2 c^2$ und $e^2 = a^2 + c^2$ oder $c^2 = e^2 - a^2$, dann ist

$R\,\mathfrak{T}(\beta + \frac{1}{2}\varphi) = R \dfrac{y c^2 (a^2 + ue)}{(c^2 u c^2 - y^2 a^2 e)} =$

$$= \frac{y(a^2 + ue)R}{(uc^2 - eu^2 + ea^2)} = \frac{yR(a^2 + eu)}{ue^2 - ua^2 + eu^2 + ea^2}$$

$= \frac{yR}{e-u}$ ist $u > e$ so ist $\frac{y}{e-u}R = -\frac{yR}{u-e}$ und also wie es auch seün muß, negativ, wenn $\angle AFM >$ als ein rechter Winkel ist.

4°) Der entgegengesetzte analütische Beweis ist leicht gefürt. Da $\mathfrak{T}(\angle AFM) = PM \cdot FP^{-1}$ und $\tan g \frac{1}{2}\varphi = yec^{-2}R$

$$R.\mathfrak{T}(\angle AFM - \angle FMO) = R\frac{y(\pm u \mp e)^{-1} - yec^{-2}}{1 + y^2 ec^{-2}(\pm u \mp e)^{-1}}$$

$$= R\frac{y(c^2 \pm e^2 \mp eu)}{(\pm c^2 u \mp c^2 e + y^2 e)} = R\frac{ya^2(a^2 - eu)}{uc^2(a^2 - eu)}$$

$$= \frac{ya^2}{uc^2}R = \tan g(\angle TMP) = TP \text{ (bei der Ellipse).}$$

Der zweite Fall, wenn $u < e$ und $\angle AFM >$ als ein rechter Winkel ist, ist $\mathfrak{T}ang \angle AFM = -\frac{yR}{e-u} = \frac{yR}{u-e}$, mithin bleibt die Entwickelung dieselbe.

5°) Bei der Hüperbel ist im ersten Fall, wenn $\angle AFM <$ ein rechter, $\tan g \angle AFM = \frac{yR}{e-u}$ da $e > u$ ist, im andern Fall ist hier $u > e$ und also auch $\angle AFM >$ als ein rechter, mithin dessen tang. oder $\tan g(\angle AFM)$ $= -\left(\frac{yR}{u-e}\right) = +\frac{yR}{e-u}$ und das Resultat muß mit dem ersten Fall das gleiche seün. Bei der Hüperbel ist aber $e^2 = a^2 + c^2$ und $y^2 + c^2 = c^2 u^2 a^{-2}$ Dies eingedenk ist

$$\tan g(\angle AFM - \angle FMO) = \frac{y(e-u)^{-1} - yec^{-2}}{1 + y(e-u)^{-1} yec^{-2}}R$$

$$= R\frac{yc^2 - ye(e-u)}{c^2(e-u) + ey^2} = R\frac{y(c^2 - e^2 + eu)}{(c^2 e + ey^2 - uc^2)}$$

$$= R$$

$$= R\frac{y(eu - a^2)a^2}{u(eu - a^2)c^2} = \frac{ya^2}{uc^2}R; \quad \frac{y^2a^2}{uc^2} =$$

subtang AM = PT.

6°) Bei der Parabel ist der sünthetische Beweis $R\mathfrak{T}(\angle TMP) = 2xy^{-1}R = ya^{-1}R$ und

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = y^2a^{-1} = R\mathfrak{T}(\angle TMP + \angle\tfrac{1}{2}\varphi)$$

$$= R\frac{ya^{-1} + ya^{-1}}{1 - y^2a^{-2}} = \frac{2ya}{a^2 - y^2}R = \frac{2yaR}{a^2 - 2ax}$$

$$= \frac{2y}{a - 2x}R$$ es mag dabei $\angle AFM \gtrless$ als ein rechter Winkel seün. Im ersten Fall ist bekanntlich $a > 2x$, im andern $2x > a$ dann aber wird überhaupt die Tangente negativ und so giebt $-\frac{2yR}{2x - a}$ wiederum $\frac{2yR}{a - 2x}$.

Der analütische Beweis springt zu leicht hier in die Augen; er unterbleibt daher.

1e. (23.) Wenn und wiefern aber $\frac{1}{2}\varphi$ zum $n(\frac{1}{2}\varphi) = \frac{n}{2}\varphi$ wird, inwiefern eben arc. curv. AM = β zum $n\beta$ wird; und umgekert, wenn und wiefern β zu $n\beta$ wird, auch $\frac{1}{2}\varphi$ zu $\frac{n}{2}\varphi$ wird, nämlich sich wechselsweise bedingend. (Vordersatz.)

Und da nun erscheint arc. curv. Am = circ. arc. $\angle TMP$ multiplizirt mit PM als angenommener Halbmesser des Zirkels, also $n\beta = n\angle TMP \times R = n\angle TMP \times PM$ (wiefern R = PM gesetzt werden kann) inwiefern

$$\text{tang}(\angle AFM - \angle FMO) = \frac{\mathfrak{T}\angle AFM - \mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi}{1 - (\mathfrak{T}\angle AFM \times \mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi)}R$$

$= R \times \mathfrak{T}\angle TMP =$ subtang β gefunden wurde. (Die Kopul.)

So

So und insofern ist und wird σ zu $n\sigma = n(\beta + \frac{1}{2}\varphi)$ $= n\beta + \frac{n}{2}\varphi$ und umgekert $n\beta = n\sigma - \frac{n}{2}\varphi$, auch $\frac{n}{2}\varphi = n\sigma - n\beta$ (Schluß Satz.)

Oder wechselsweise bedingend erreichen die $\angle AFM$ $\angle PMO$ und $\angle PMT$ und so auch ihre ZirkelBögen $\sigma \times PM$, $\frac{1}{2}\varphi \times PM$ und $\beta \times PM =$ dem Verhältnis des Bogens der Gekrümmten zu gleichen Momenten ihr nfaches, wie irgend eines von ihnen sein nfaches erreicht.

Es drückte also der ZirkelBogen, wiefern die Ordinate als dessen Radius zu achten, und dessen Tangente gleich der zugeordneten Subtangente oder dessen Sinus gleich dem zugeordneten Subsinus wäre, das Verhältnis der Grosheit des Bogens der Gekrümmten $= \beta$ genau aus, oder das Verhältnis der Größe des Bogens der Gekrümmten, welcher auf seiner AksLinie senkrecht aufstehet, ist durch seine Subtangente *qua* Tangente und durch seinen Subsinus, *qua* Sinus, nach den bekannten und von mir zuerst erwießenen Formeln, den ZirkelBogen aus seiner Tangente oder aus seinem Sinus zu finden, gegeben. —

Oder

$$R^{-1}\,\mathrm{tang}\tfrac{n}{2}\varphi = \left[n\,\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ 2\ 3}\,\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\ 2\ 3\ 4\ 5}\,\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^5 . - + \ldots . + \frac{n(n-1)\ldots(n-4r)}{1\ 2\ \ldots(4r+1)}\,\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^{4r+1} - \frac{n(n-1)\ldots(n-4r-2)}{1\ .\ 2\ \ldots\ 4r+3}\,\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^{4r+3}\ \text{u. s. w.} \right].$$

$$\left[1 - \frac{n(n-1)}{1\ 2}\,\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\ 2\ 3\ 4}\,\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^4 \right.$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6} \mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^6$$

$$+ - \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-4r+1)}{1\ldots 4r} \mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^{4r}$$

$$- \frac{n(n-1)\ldots(n-4r-1)}{1\ldots(4r+2)} \mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^{4r+2} \text{ u. s. w.}\Big]^{-1}$$

$$\mathfrak{T} n\sigma = \Big[n\mathfrak{T}\sigma - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ 2\ 3}\mathfrak{T}\sigma^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\ 2\ 3\ 4\ 5}\mathfrak{T}\sigma^5 - + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-4r)}{1\ 2\ \ldots(4r+1)}\mathfrak{T}\sigma^{4r+1}$$

$$- \frac{n(n-1)\ldots(n-4r-2)}{1\ldots(4r+3)}\mathfrak{T}\sigma^{4r+3} \text{ u. s. w.}\Big].$$

$$\Big[1 - \frac{n(n-1)}{1\ 2}\mathfrak{T}\sigma^2 - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\ 2\ 3\ 4}\mathfrak{T}\sigma^4$$

$$- \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1\ 2\ \ldots\ 6}\mathfrak{T}\sigma^6 - + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-4r+1)}{1\ldots 4r}\mathfrak{T}\sigma^{4r} +$$

$$- \frac{n(n-1)\ldots(n-4r-1)}{1\ldots(4r+2)}\mathfrak{T}\sigma^{4r+2} \text{ u. s. w.}\Big]^{-1}$$

$$\text{sub}\,\mathfrak{T} n\beta = \Big[n\,\text{sub}\,\mathfrak{T}\beta - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ 2\ 3}\text{sub}\,\mathfrak{T}\beta^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\ 2\ 3\ 4\ 5}\text{sub}\,\mathfrak{T}\beta^5 - + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-4r)}{1\ldots(4r+1)}\text{sub}\,\mathfrak{T}\beta^{4r+1}$$

$$- \frac{n(n-1)\ldots(n-4r-2)}{1\ldots(4r+3)}\text{sub}\,\mathfrak{T}\beta^{4r+3} \text{ u. s. w.}\Big].$$

$$\Big[1 - \frac{n(n-1)}{1\ 2}\text{sub}\,\mathfrak{T}\beta^2 - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\ 2\ 3\ 4}\text{sub}\,\mathfrak{T}\beta^4 -$$

$$- \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 6} \text{sub}\mathfrak{T}\beta^6 + - \ldots\ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-4r+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 4r} \text{sub}\mathfrak{T}\beta^{4r}$$

$$- \frac{n(n-1)\ldots(n-4r-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(4r+2)} \text{sub}\mathfrak{T}\beta^{4r+2} \text{ u. s. w.}\Big]^{-1}$$

$$\sin\frac{n}{2}\varphi = n\sin\frac{n}{2}\varphi - \frac{n(n^2-1^2)}{1\ 2\cdot 3}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^3$$

$$+ \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1\ 2\cdot 3\ 4\ 5}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^5 + - \ldots\ldots$$

$$- \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(4r-3)^2)}{1\ 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots(4r-2)(4r-1)}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^{4r-1} + \text{u. s. w.}$$

$$\sin n\sigma = n\sin\sigma - \frac{n(n^2-1^2)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin\sigma^3$$

$$+ \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\sin\sigma^5 + - \ldots\ldots$$

$$- \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(4r-3)^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots(4r-2)(4r-1)}\sin\sigma^{4r-1}$$

$$+ \frac{n(n^2-1^2)\ldots(n^2-(4r-1)^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 4r(4r+1)}\sin\sigma^{4r+1} \text{ u. s. w.}$$

$$\text{subl}:n\beta = n\,\text{subl}\beta - \frac{n(n^2-1^2)}{1\cdot 2\cdot 3}\text{subl}\beta^3$$

$$+ \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\text{subl}:\beta^5 + - \ldots\ldots$$

$$- \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(4r-3)^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots(4r-2)(4r-1)}\text{subl}:\beta^{4r-1}$$

$$+ \frac{n(n^2-1^2)\ldots(n^2-(4r-1)^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 4r(4r+1)}\text{subl}\beta^{4r+1} \text{ u. s. w.}$$

Somit ist nach obigen Sätzen und den Schlüssen, welche mer als notdürftig von mir scharf erwiesen sind *).

σ . R

*) Siehe Deduktion, rein wissenschaftliche, u. s. w. Leipzig 1800 und oben die Sätze A, B und C in der ersten Abhandlung dieser zweiten Abtheilung.

$$\sigma . R = R . [\Sigma\sigma - \tfrac{1}{3}\Sigma\sigma^3 + \tfrac{1}{5}\Sigma\sigma^5 - \tfrac{1}{7}\Sigma\sigma^7 + \tfrac{1}{9}\Sigma\sigma^9 \text{ u. s. w. ins } \infty] \text{ oder } \sigma . R = R [\sin\sigma + \frac{1 . 1}{2 . 3}\sin\sigma^3 + \frac{1 . 1 . 3 . 3}{2 . 3 . 4 . 5}\sin\sigma^5 + \frac{1 . 1 . 3 . 3 . 5 . 5}{2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7}\sin\sigma^7 + \frac{1 . 1 . 3 . 3 . 5 . 5 . 7 . 7}{2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9}\sin\sigma^9 \text{ u. s. w. ins } \infty];$$

$$\tfrac{1}{2}\varphi . R = R . [\Sigma\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{3}\Sigma\tfrac{1}{2}\varphi^3 + \tfrac{1}{5}\Sigma\tfrac{1}{2}\varphi^5 - \tfrac{1}{7}\varphi^7 + \tfrac{1}{9}\Sigma\tfrac{1}{2}\varphi^9 \text{ u. s. w. ins } \infty]$$

$$\tfrac{1}{2}\varphi . 'R = [\sin\tfrac{1}{2}\varphi + \frac{1 . 1}{2 . 3}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^3 + \frac{1 . 1 . 3 . 3}{2 . 3 . 4 . 5}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^5 + \frac{1 . 1 . 3 . 3 . 5 . 5}{2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^7 + \frac{1 . 1 . 3 . 3 . 5 . 5 . 7 . 7}{2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^9 \text{ u. s. w. ins } \infty] . R;$$

$$\text{und } ''R . \beta = ''R . [\operatorname{sub}\Sigma . \beta - \tfrac{1}{3} . \operatorname{sub}\Sigma\beta^3 + \tfrac{1}{5}\operatorname{sub}\Sigma\beta^5 - \tfrac{1}{7}\operatorname{sub}\Sigma\beta^7 + \tfrac{1}{9}\operatorname{sub}\Sigma\beta^9 \text{ u. s. w. ins } \infty] = R[\operatorname{subsin}:\beta + \frac{1 . 1}{2 . 3}\operatorname{subsin}\beta^3 + \frac{1 . 1 . 3 . 3}{2 . 3 . 4 . 5}\operatorname{subsin}:\beta^5 + \frac{1 . 1 . 3 . 3 . 5 . 5}{2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7} . \operatorname{subsin}\beta^7 + \frac{1 . 1 . 3 . 3 . 5 . 5 . 7 . 7}{2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9}\operatorname{subsin}\beta^9 \text{ u. s. w. ins } \infty]$$

20. (24.) Noch möchten einige Zweifel über die Allgemeingültigkeit unseres Resultates auch von solchen EllipsenBögen, welche auf die kleinste Akse senkrecht aufstehen, obwalten; auch diese sind eben leicht zu heben.

2°) Was bei der Ellipse den Bogen MD als ErgänzungsBogen mit AM zum Quadranten AD derselben bestrift, so ist zu bedenken, daß des ∠MFD oder des ergänzenden ZirkelBogens Tangente = der Kotangente vom ∠AFM

∠AFM ist; diese ist positiv oder negativ, wenn und wie ∠AFM ≷ als ein rechter Winkel ist, und im ersten Fall $= + \frac{u - e}{y} = \frac{CP - CF}{PM}$ und im zweiten

$$= - \frac{e - u}{y} = + \frac{u - e}{y}.$$

3°) Die Kotangente ist also stets $= + \frac{u - e}{y} =$ Tangente von der Ergänzung. Es erscheint aber der Bogen MD ähnlich und gleich einem ZirkelBogen, dessen Tangente = der Kotangente vom Bogen des ∠AFM *plus* dem Bogen $\frac{1}{2}\Phi$ dessen Tangente $= eyc^{-2}R$, mit den Radius-Vektor FM beschrieben.

Alles dies ob der stetigen geänderten, vom Punkt oder Scheitel *D* ausgehenden, stumpfern Krümmung als die beim ZirkelBogen. — —

4°) Also $R\mathfrak{T}mD = \frac{\text{Kot.}\angle AFM + \mathfrak{T}\frac{1}{2}\Phi}{1 - \text{Kot}\angle AFM \times \mathfrak{T}\frac{1}{2}\Phi} R$

$$= \frac{(u-e)y^{-1} + eyc^{-2}}{1 - (u-e)y^{-1}eyc^{-2}} R = R\frac{c^2u - c^2e + ey^2}{y(c^2 - eu + e^2)}$$

$$= \frac{c^2u(a^2 - eu)}{ya^2(a^2 - eu)} R = \frac{uc^2}{ya^2} R$$

Umgekert ist

5°) $R\,\text{Kot}\angle AFM = \frac{\text{sub}\,\mathfrak{T}x \pm \mathfrak{T}\frac{1}{2}\Phi}{1 \mp \text{sub}\,\mathfrak{T}x\,\mathfrak{T}\frac{1}{2}\Phi} R$

$$= \frac{uc^2y^{-1}a^{-2} \pm eyc^{-2}}{1 \pm uc^2y^{-1}a^{-2}(eyc^{-2})} R = \frac{uc^4 \pm ey^2a^2}{y(c^2a^2 \mp euc^2)} R$$

$$= \frac{c^2(uc^2 \pm ea^2 \mp eu^2)}{yc^2(a^2 \mp eu)} R = \frac{ua^2 - e^2u \pm ea^2 \mp eu^2}{y(a^2 \mp eu)} R$$

$= R\frac{u - e}{y}$; (= u — e wo R = y): was zu erweißen war.

6°)

6°) Oder viel kürzer, da MD = Quadr — AM so ist tang MD = cot AM, diese ist aber wie TP : PM = PM : cot AM; cot. AM = $PM^2\ TP^{-1} = y^2\ a^2\ u^{-1}\ c^{-2} : y$ = y : cot AM; cot AM = $u\,c^2\,a^{-2}$ = subnorm : von AM.

7°) Der EllipsenBogen BM ist die Ergänzung des Bogens AM zum HalbKreis der Ellipse, ersterer wird von B aus mit dem stets zunemenden RadiusVektor fM beschrieben; dann ist die Tangente dieser stumpfen ∠Oefnung am Fokus f die negative (ob der Stumpfheit des ∠MfB)

Tangente vom ∠MfA und gleich $-\frac{y}{e+u}$ zu setzen.

Da der Bogen BM von B aus bis zu D spitzwinklicht sich stetig krümmt, am Punkt D das Maksimum seines Krümmens erreichte und nun, von D aus in das entgegengesetzte, nämlich ins stumpfwinklichte, Krümmen übergeht und fortgehet, und dadurch soviel von seinem Maksimum seines spitzwinklichten Krümmens aufhebt, als der Bogen DM seiner Größe nach als eine stumpfwinklichte Krümmung aufzuheben vermag, so ist nur das, was der $\frac{1}{2}$∠FMf = $\frac{1}{2}\varphi$ ausdrückt, als herausgepreßtes, stetig herausgedrücktes Stück vom ZirkelBogen mit fM beschrieben beim EllipsenBogen BM (von gleicher ∠Oefnung BfM) zu betrachten. Demnach wird die Größe des EllipsenBogens BM, beschrieben durch den von a — e bis zu a — uea^{-1} stetig wachsenden RadiusVektor, im Verhältnis eines ZirkelBogens, von gleichem größten Radius (der Normale) beschrieben, stehen, der die Differenz zwischen dem ZirkelBogen fM . (∠BfM — fM : $\frac{1}{2}\varphi$) oder von der ∠Oefnung (∠BfM — $\frac{1}{2}$∠fMF) deren Tangente = der Tangente von (∠BfM — $\frac{1}{2}\varphi$) ist; die Rechnung, wie folgt, ergiebt auch die negative Subtangente von AM zur Subtangente von BM

$$\mathfrak{T}(\angle BfM - \tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{\mathfrak{T}\angle BfM - \mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi}{1 + \mathfrak{T}\angle BfM \,.\, \mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi}$$

$$= \frac{(-y(e+u)^{-1}) - \cdot euc^{-2}}{1 + eyc^{-2}(-y(e+u)^{-1})}$$

$$= \frac{-y(c^2 + e^2 + eu)}{c^2 e + e^2 u - ey^2}$$

$$= -y$$

$$= -y\frac{(a^2+eu)a^2}{a^2c^2e+c^2ua^2-c^2a^2e+c^2eu^2}$$

$$= -\frac{ya^2}{uc^2}\cdot\frac{a^2+eu}{a^2+eu} \text{ also } -ya^2u^{-1}c^{-2}R$$

$=$ subTang BM.

21. (25.) Aus der scharfen Anschauung der Qualitäten der geraden Linien, welche, auf den Bogen einer Kurve bezogen, auf ihr gestellt oder an ihr angelegt sind, aus den Eigenschaften einer jeglichen Kurve leuchtet von selbst als Notwendigkeit ein, daß zuvörderst die beiden Akse in der Ellipse und Hüperbel, der Parameter in der Parabel die Größe der Bögen bedingen und modifiziren, je nachdem sie größer oder kleiner werden: durch diese sind die beiden RadiiVektoren bedingt: diese bedingen nun zunächst den Bogen und durch ihre Variationen und Ergänzungen zur großen Akse bei der Ellipse, durch ihre Differenzen unter sich stets die große Akse herstellend bei der Hüperbel; dann bestimmt das geometrische Mittel, in Verbindung mit dem Quotienten aus der halben großen in die halbe kleine Akse oder umgekert aus dieser in jene, aus ihnen die Größe der Normal-Linie; das geometrische Mittel? ja weil jeglicher der beiden RadiiVektoren sein Recht auf die Vergrößerung oder Verkleinerung des KurvenBogens äußert. Beide sollen und wollen also als Faktoren vorkommen und da es keiner allein wollen kann; so konnte nur ihr geometrisches Mittel aus ihnen, den Radius abgeben, welcher die Größe des Bogens bestimmt. Er ist zuvor durch die große und kleine Akse modifizirt, die NormalLinie, worauf an dem einen Ende M der KurvenBogen senkrecht steht; das andere Ende steht entweder am Scheitel A, wenn die Kurve zugleich auf der großen Akse senkrecht aufsteht, senkrecht auf der Quernormale AO, welche mit der Normale MQ den VerhältnisWinkel MOA bildet; oder das andere Ende steht auf einer andern untern (Quer)Normale m'O in m senkrecht auf, welche mit der verlängerten obern Normale M'O den Verhältniswinkel M'Om bildet, wenn der KurvenBogen Mm ist.

Die obere Normale ist allemal größer als die untere (inner dem ersten Quadranten bei der Ellipse). Mit jedem der beiden Normalen als Radien lassen sich ZirkelBögen be-

beschrieben denken, welche auf den EndPunkten A oder m oder M senkrecht aufstehen und bei gleicher WinkelOefnung im geraden Verhältniß mit dem KurvenBogen stehen, welcher zwischen beiden inne liegt und mit jedem ZirkelBogen Einen BerürungsPunkt gemein hat. Der größere ZirkelBogen ist durch die gemeinsame WinkelOefnung MOA oder M'Om und durch die Normale MO oder M'O, der kleinere durch dieselbe ∠Oefnung und durch die Normale AO oder m'O rücksichtlich der KurvenBögen AM und mM genau bestimmt.

22. (26.) One weitere Spitzfindigkeiten leuchtet nun wol von selbst ein, daß der zwischen beiden ZirkelBögen mitten inne liegende Bogen der Ellipse, Parabel, oder Hüperbel oder jeglicher Kurve nicht das arithmetische, sondern das geometrische Mittel zwischen beiden halte; dieses, weil jegliche der beiden Normalen, welche auf den KurvenBogen senkrecht aufstehen und die erforderliche WinkelOefnung bilden, notwendiger Weise gleich stark das Recht haben, gleich mächtig in der GrößenBestimmung des KurvenBogens zu würken und als Faktor vorzukommen; keine kann aber bei der Rektifikation, wol aber in der Quadratur, in voller Potenz erscheinen, sie müssen sich beiderseits um die halbe Potenz ihrer selbst Platz machen; und eben weil sie Faktoren sind, können sie nicht im arithmetischen Mittel die Größe des Bogens bestimmen.

23. (27.) Jetzt haben wir also das Ziel unser Untersuchungen bald erreicht: Jeder KurvenBogen, seü er Ellipsen-, Parabel- oder HüperbelBogen, (oder von sonst einer andern Kurve) ist gleich einem ZirkelBogen, beschrieben mit einem Radius, welcher das geometrische Mittel zwischen den beiden Normalen hält, die auf den beiden EndPunkten des KurvenBogens senkrecht aufstehen und die nötige WinkelOefnung an ihrem DurchschneidungsPunkte bilden: diese WinkelOefnung ist gleich jener, welche die senkrechte Ordinate auf der einen Normale mit der senkrechten Tangente auf der andern Normale in ihrem DurchschneidungsPunkt bilden; der Ausdruck für die Tangente dieses Winkels, den Radius = 1 gesetzt, war oben gefunden $y a^2 u^{-1} c^{-2}$ für Ellipse und Hüperbel, wo a die halbe große Akse oder den Halbmesser bedeutet, welcher durch den MittelPunkt geht, c die halbe

kleine

kleine Akse oder den Halbmesser bedeutet, welcher den vorigen im MittelPunkte durchschneidet y und u sind die Ordinaten, welche auf der großen und kleinen Akse senkrecht aufstehen.

Die Größe dieser Tangente für den ErgänzungsBogen zum Quadranten bei der Ellipse ist $u c^2 y^{-1} a^{-2}$.

2°) Bei den drei Gekrümmten nam der RadiusVektor FM vom (kleinsten) Werte FA bis zum Werte FM alle unendlich möglichen Zwischenwerte (Größen) nach einem stetigen Gesetze an, um nämlich den Bogen *AM* zu beschreiben; er floß aus dem Wert von $FA = a - e$, stetig fließend in den Wert von $FM = a - eua^{-1}$ über. Umgekert nam er bei der Ellipse von $FD = a$ bis zu FM oder von $FB = a + e$ durch die vielen unendlichen MittelWerte des $a + eua^{-1}$ stetig hindurch fließend, ab, um nämlich den EllipsenBogen DM zu beschreiben.

3°) Ob dieser stetigen Ueberfließung in die unendlich möglichen Zwischenradien und deren Beschreibung (oder Ueberfließung in) von angehörigen unendlich möglichen Zwischenbögen, oder ob dieser stetigen Ueberfließungen den eigentlichen Fluxions, die Newton's höherer Geist füllte, andete, meinte, der waren Method of Fluxions, die aber ein Mensch Newton falsch verstand nnd darstellte, verhalten sich eben in jeder ein und eben derselben Gekrümmten die rücksichtlichen Bögen unter sich wie ZirkelBögen, beschrieben mit den rücksichtlichen (durch die RadiiVektoren bedingten) Normalen, von den rücksichtlichen WinkelOefnungen unter denselben Winkeln, welche ihre Tangenten an den beiden Normalen (oder die Subtangenten an ihren Ordinaten) messen und ausdrücken oder welche die Normalen und Quernormalen der Bögen eben einschließen.

Normalen als Radien der Bögen? — Ja, denn nur solche je zwei Linien, welche die (beiden) Enden der Bögen senkrecht durchschneiden, können als direkte, Bögen bestimmende Radien angesehen werden; das zeigte uns das obige philosophische Räsonnement.

24. (28.) Es sind also Ellipsen-, Parabel- oder HüperbelBögen $AM = \beta$, welche auf einer AksLinie und einer Normale oder auf zwei Normalen senkrecht an ihren EndPunkten aufstehen, ZirkelBögen gleich zu achten, welche mit der geometrisch mittlern Normale (aus beiden

den Normalen an den EndPunkten) unter der WinkelOefnung, welche Tangente und Ordinate an der einen Normale bilden, beschrieben sind, davon die Subtangente durch die Ordinate dividirt die auf den Radius als Einheit bezogene Tangente ist. Oder

1°) Arc. ell. β = (Arc : circ. $\angle$MOA) . (norm : β . quernorm $\beta)^{\frac{1}{2}}$

2°) Arc. parab : β = (Arc. circ : $\angle$MOA) . (norm : β . quernorm. $\beta)^{\frac{1}{2}}$

3°) Arc. hyp : β = (Arc. circ : ($\angle$MOA) . (norm : β . quernorm : $\beta)^{\frac{1}{2}}$

4°) Arc. ell. β = Arc. circ. $ya^2u^{-1}c^{-2}$ [$(ca^{-1}FM^{\frac{1}{2}}$. $fM^{\frac{1}{2}})$ $(1 - e^2ua^{-3})a]^{\frac{1}{2}}$

5°) arc. par. β = arc. circ. $2x . y^{-1}a(1 + xa^{-1})^{\frac{1}{2}}$. $(1 + 2xa^{-1})^{\frac{1}{4}}$

6°) arc. hyp. β = arc. circ. $ya^2u^{-1}c^{-2}[ca^{-1}FM^{\frac{1}{2}}$. $fM^{\frac{1}{2}}(ue^2a^{-3} - 1)a]^{\frac{1}{2}}$

arc. ell. β = arc : circ. $yc^{-2}u^{-1}a^2$. [$ac(1 - e^2ua^{-3})$. $(1 - e^2u^2a^{-4})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} = (1 - e^2ua^{-3})^{\frac{1}{2}}(1 - e^2u^2a^{-4})^{\frac{1}{4}}$. $a^{\frac{3}{2}}c^{-\frac{1}{2}} \times$ (arc : circ : $yc^{-1}u^{-1}a$)

arc. ell. α = $(ac)^{\frac{1}{2}}(1 + e^2y^2c^{-4})^{\frac{1}{4}}(1 + e^2yc^{-3})^{\frac{1}{2}}$ $\times$ (arc : circ : $uc^2y^{-1}a^{-2}$)

= $a^{-\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{2}}(1 + e^2y^2c^{-4})^{\frac{1}{4}}(1 + e^2yc^{-3})^{\frac{1}{2}}$ $\times$ (arc : circ : $uc(ya)^{-1}$)

arc. hyp : β = $(ac)^{\frac{1}{2}}(ue^2a^{-3} - 1)^{\frac{1}{2}}(u^2e^2a^{-4} - 1)^{\frac{1}{4}}$ $\times$ arc. circ : $(ya^2(uc^2)^{-1})$ = $a^{\frac{3}{2}}c^{-\frac{1}{2}}(ue^2a^{-3} - 1)^{\frac{1}{2}}$. $(u^2e^2a^{-4} - 1)^{\frac{1}{4}} \times$ arc : circ : $(yc^{-1}u^{-1}a)$

arc. par : β = $a(1 + xa^{-1})^{\frac{1}{2}}(1 + 2xa^{-1})^{\frac{1}{4}}$ $\times$ arc : circ : $(2xa^{-1})^{\frac{1}{2}}$ = $a(1 + \frac{1}{2}y^2a^{-2})^{\frac{1}{2}}$. $(1 + y^2a^{-2})^{\frac{1}{4}}$ arc : circ. (ya^{-1})

tang.

$$\text{tang. ell. } \beta = u^{-1} a^2 c^{-1} (1 - u^2 a^{-2})^{\frac{1}{2}} (1 - e^2 u a^{-3})^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - e^2 u^2 a^{-4})^{\frac{1}{4}} (ac)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{tang. ell. } \alpha = (1 - y^2 c^{-2})^{\frac{1}{2}} y^{-1} a^{-\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} (1 + e^2 y^2 c^{-4})^{\frac{1}{4}} \cdot (1 + e^2 y c^{-3})^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{tang. hyp: } \beta = u^{-1} \cdot a(u^2 a^{-2} - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot c^{-\frac{1}{2}} \cdot (u e^2 a^{-3} - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot (u^2 \cdot e^2 a^{-4} - 1)^{\frac{1}{4}}$$

$$\text{tang. par: } \beta = y(1 + \tfrac{1}{2} y^2 a^{-2})^{\frac{1}{2}} (1 + y^2 a^{-2})^{\frac{1}{4}}$$

25. (29.) Der ParabelBogen β ist also, nach der ser leichten Entwickelung und Formel, den Bogen aus seiner Tangente und aus seinem Sinus zu finden nach den SchlußFolgen im Anfange dieser Abtheilung, erstlich

$$t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} \text{ u. s. w. und 2tens}$$

$$\sin + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} \sin^3 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \sin^7 \text{ u. s. w.}$$

Wo $y a^{-1}$ die Größe der Tangente für die nötige Winkel-Oefnung AOM auf die Einheit des sin. totus reduzirt und $a(1 + \frac{1}{2} y^2 a^{-2})^{\frac{1}{2}} (1 + y^2 a^{-2})^{\frac{1}{4}} = a(1 + x a^{-1})^{\frac{1}{2}} (1 + 2x a^{-1})^{\frac{1}{4}} =$ norm. med β gleich dem erforderlichen mittlern Radius, welcher in die Formel für die Größe des Bogens zu multipliziren ist. Es ist dabei

$MT = y a^{-1} \cdot a(1 + y^2 a^{-2})^{\frac{1}{2}} y(1 + y^2 a^{-2})^{\frac{1}{2}}$
= tang circ. arc. β an der obern Normale M'O

$A'T = y a^{-1} a(1 + \frac{1}{2} y^2 a^{-2}) = (y + \frac{1}{2} y^3 a^{-2})$
= tang arc. circ. β an der untern Normale AO.

1°) Mithin parab. arc. β

$= (y a^{-1} - \frac{1}{3} y^3 a^{-3} + \frac{1}{5} y^5 a^{-5} - \frac{1}{7} y^7 a^{-7} + \frac{1}{9} y^9 a^{-9}$ u. s. w.) $a(1 + \frac{1}{2} y^2 a^{-2})^{\frac{1}{2}} (1 + y^2 a^{-2})^{\frac{1}{4}}$
$\mathfrak{X} \cdot a(1 + \frac{1}{2} y^2 a^{-2})^{\frac{1}{2}} (1 + y^2 a^{-2})^{\frac{1}{4}}$. Es ist aber

(1

$(1 + \frac{1}{2}y^2a^{-2})^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{4}y^2a^{-2} - \frac{1}{4}\frac{1}{8}y^4a^{-4}$
$+ \frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{3}{12}y^6a^{-6} - \frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{3}{12}\frac{5}{16}y^8a^{-8}$ u. s. w. und
$(1 + y^2a^{-2})^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}y^2a^{-2} - \frac{1}{4}\frac{3}{8}y^4a^{-4}$
$+ \frac{1}{4}\frac{3}{8}\frac{7}{12}y^6a^{-6} - \frac{1}{4}\frac{3}{8}\frac{7}{12}\frac{11}{16}y^8a^{-8}$ u. s. w.

Mit diesen beiden unendlichen Reihen hätte man die erste zu multipliziren, um alles in Eine unendliche Reihe zu verwandeln.

2°) Des WinkelBogen AFM ist oben als das Doppelte vom WinkelBogen AOM gefunden worden, also
arc. $\angle$ AFM $= 2ya^{-1} - \frac{2}{3}y^3a^{-3} + \frac{2}{5}y^5a^{-5}$
$- \frac{2}{7}y^7a^{-7} + \frac{2}{9}y^9a^{-9}$ u. s. w. wäre AF $= \frac{1}{2}a$ der Radius dieses Bogens, so wäre dieser
$= a(ya^{-1} - \frac{1}{3}y^3a^{-3} + \frac{1}{5}y^5a^{-5} - \frac{1}{7}y^7a^{-7}$
$+ \frac{1}{9}y^9a^{-9}$ u. s. w.) $= a.\mathfrak{X}$

3°) und (arc. circ. $\angle$ AFM) : arc : parab β
$= a.\mathfrak{X} : \mathfrak{X}.a(1 + \frac{1}{2}y^2a^{-2})^{\frac{1}{2}}(1 + y^2a^{-2})^{\frac{1}{4}}$
$= 1 : (1 + \frac{1}{2}y^2a^{-2})^{\frac{1}{2}}(1 + y^2a^{-2})^{\frac{1}{4}}$. Oder
(arc. cir. $\angle$ AFM)^4 : (arc. parab β)^4
$= a^6 : (a^2 + \frac{1}{2}y^2)^2(a^2 + y^2)$

Es ist also die 4 Potenz des ParabelBogens durch einen algebraisch rationalen Ausdruck in einer Funktion des ZirkelBogens am Fokus und der Ordinate gegeben.

$$\text{Da arc. parab } \beta = \frac{\text{arc. circ. } \angle \text{ AFM}}{(1 + \frac{1}{2}y^2a^{-2})^{\frac{1}{2}}(1 + y^2a^{-2})^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{\text{arc. circ. } \varphi}{(1 + \frac{1}{2}\mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi^2)^{\frac{1}{2}}(1 + \mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi^2)^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{(\cos\frac{1}{2}\varphi)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \frac{1}{2}\mathfrak{T}\frac{1}{2}\varphi^2)^{\frac{1}{2}}}\text{arc. circ. } \varphi$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{1}{2}\varphi)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \cos\frac{1}{2}\varphi^2)^{\frac{1}{2}}}\text{arc. circ.} : \varphi$$

Weiß man also den StralenBrechungsWinkel AFM $=$ FM[illegible]

$(1+e^2y^2c^{-4})^{\frac{1}{4}}$; ell:arc. $\alpha = \left[\frac{uc}{ay} - \frac{1}{3}\left(\frac{uc}{ay}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{uc}{ay}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{uc}{ay}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{uc}{ay}\right)^9 \text{ u. f. w.}\right]$.

$(1+e^2yc^{-3})^{\frac{1}{2}}(ac)^{\frac{1}{2}}(1+e^2y^2c^{-4})^{\frac{1}{4}}$

$= \left[\frac{u}{a} + \frac{1.1}{2.3}\left(\frac{u}{a}\right)^3 + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(\frac{u}{a}\right)^5 + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{u}{a}\right)^7 + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\left(\frac{u}{a}\right)^9 \text{ u. f. w.}\right] [ac(1+e^2yc^{-3})(1+e^2y^2c^{-4})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$

Und da sub. cos. $\beta = uc(a^4 - e^2u^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= uca^{-2}(1-e^2u^2a^{-4})^{-\frac{1}{2}}$

4°) $\frac{c}{a}$ ell:arc$(q-\beta)$

$= [(uc(1-e^2u^2a^{-4})^{-\frac{1}{2}}a^{-2}) + \frac{1.1}{2.3}(uc.(1-e^2u^2a^{-4})^{-\frac{1}{2}}a^{-2})^3 + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}(uc.(1-e^2u^2a^{-4})^{-\frac{1}{2}}a^{-2})^5 + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}(uc.(1-e^2u^2a^{-4})^{-\frac{1}{2}}a^{-2})^7 \text{ u. f. w.}] \times [ac(1+e^2y^2c^{-4})^{\frac{1}{2}}.(1+e^2yc^{-3})]^{\frac{1}{2}}$

5°) Wiefern im Ausdruck für die Tangente oder den Sinus eines Bogens außer den veränderlichen Koordinaten noch eine beständige (ganze oder gebrochene) Größe als Faktor vorkömmt, so modifizirt diese beständige Größe das Verhältniß der Tangente, oder des Sinus zum Bogen nicht im geringsten, wenn eben dieses durch eine unendliche Reihe in einer Funktion der Tangente und des Sinus bestimmt wird.

Wird

Wird die Tangente und der Sinus ax^{-1} od. cu^{-1} mal grösser od. kleiner z. B., so wird es auch der Bogen: Und man hat in der Bestimmung des reinen Verhältnisses zwischen Tang. oder Sinus und Bogen solchen Faktor aus dem Ausdrucke one den geringsten Nachtheil für Richtigkeit und Schärfe gänzlich auszulassen; da der Radius, welcher in die Reihe zu multipliziren ist, die ware Grösse doch erst bestimmt. Und selbst die Nettigkeit der Rechnung erheischt es, keine unnötige Package mit zu füren; höchstens diese beständige Gröse sowol links als rechts, den Bogen sowol als die ganze Summe aller Glieder nur im Allgemeinen damit zu multipliziren und nicht in jeglichem Gliede diesen Faktor, in gleiche Potenz erhoben, mit anzuren, in welcher die übrigen auf ihre Einheit bezogenen veränderlichen Grösen vorkommen, z. B. nicht $\left(\frac{a}{c}\right)^z \left(\frac{ya}{uc}\right)^z$ im 4ten Gliede zu setzen, da $\left(\frac{ya}{cu}\right)^z$ genügt und gleiches Resultat giebt.

Es ist $ya^2u^{-1}c^{-2}$ die, auf die $\frac{1}{2}$ große Akse a als Einheit = sin. totus reduzirte Gröse der Tangente: wird aber auf die halbe kleine Akse c, als Einheit = sin. tot., die Gröse der Tangente reduzirt, so erhält man onedem für ya^2uc^{-2} den Ausdruck $(ya^2u^{-1}c^{-2})ca^{-1} = yau^{-1}c^{-1}$

5°) Es ist $\mathfrak{T}\beta = \frac{ya}{cu}$ oder $\frac{a}{c}\mathfrak{T}\beta = \frac{ya}{cu}\cdot\frac{a}{c}$

$\mathfrak{T} = \frac{a}{c}\beta$ Oder schlechtweg $\mathfrak{T}\beta^2 = \frac{y^2a^2}{c^2u^2} = \frac{y^2c^{-2}}{1-y^2c^{-2}}$

mithin $(yc^{-1}u^{-1}a)^n = (yc^{-1})^n(1-y^2c^{-2})^{-\frac{n}{2}}$

$$= \left(\frac{y}{c}\right)^n + \frac{n}{2}\left(\frac{y}{c}\right)^{n+2} + \frac{n(n+2)}{2\ 4}\left(\frac{y}{c}\right)^{n+4}$$

$$+ \frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot\frac{n+4}{6}\left(\frac{y}{c}\right)^{n+6} \text{ u. s. w. eben so}$$

$(u$

$$\left(\frac{u}{a}\right)^n\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)^{-\frac{n}{2}}=\left(\frac{u}{a}\right)^n+\frac{n}{2}\left(\frac{u}{a}\right)^{n+2}$$
$$+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\left(\frac{y}{c}\right)^{n+4}+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot$$
$$\frac{n+4}{6}\left(\frac{u}{a}\right)^{n+6}$$ u. s. w. Es ist auch

$$\left(\frac{ya^2}{ya^2}\right)=\frac{a}{c}\cdot\frac{y}{c}\cdot(1-y^2c^{-2})^{-\frac{1}{2}}$$ mithin

$$\left(\frac{ya^2}{uc^2}\right)^n=\left(\frac{y}{c}\right)^n\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^n\cdot\left[1+\frac{n}{2}\left(\frac{y}{c}\right)^2\right.$$
$$+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\left(\frac{y}{c}\right)^4+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot\frac{n+4}{6}\cdot$$
$$\left(\frac{y}{c}\right)^6+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot\frac{n+4}{6}\cdot\frac{n+6}{8}\left(\frac{y}{c}\right)^8$$
u. s. w.]

6°) Ferner ist $\frac{a}{c}\left(\frac{y}{c}\right)^n\left(1+\frac{e^2}{c^2}\cdot\frac{y^2}{c^2}\right)^{-\frac{n}{2}}$

$$=\left(\frac{a}{c}\right)^n\cdot\left(\frac{y}{c}\right)^n\cdot\left[1-\frac{n}{2}\frac{e^2}{c^2}\frac{y^2}{c^2}+\frac{n}{2}\cdot\right.$$
$$\frac{n+2}{4}\cdot\frac{e^4}{c^4}\frac{y^4}{c^4}-\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot\frac{n+4}{6}\cdot\frac{e^6}{c^6}\cdot$$
$$\frac{y^6}{c^5}+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot\frac{n+4}{6}\cdot\frac{n+6}{8}\cdot\frac{e^8}{c^8}\cdot\frac{y^8}{c^8}$$
u. s. w.]

7°) Und eben so ist $\left(\frac{uc^2}{ya^2}\right)^n=\left(\frac{c}{a}\right)^n\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^n\cdot$

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)^{-\frac{n}{2}}=\left(\frac{c}{a}\right)^n\left(\frac{u}{a}\right)^n\cdot\left[1+\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^2\right.$$
$$+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\left(\frac{u}{a}\right)^4+\frac{u}{a}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot\frac{n+4}{6}\left(\frac{u}{a}\right)^6+$$

$$+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot\frac{n+4}{6}\cdot\frac{n+6}{8}\left(\frac{u}{a}\right)^8 \text{ u. s. w.}\Big]$$

8°) Nach dem Binomium entwickelt, erhält man ebenfalls

$$\left(\frac{c}{a}\cdot\frac{u}{a}\left(1-\frac{e^2}{a^2}\cdot\frac{u^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^n = \left(\frac{c}{a}\right)^n\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^n\cdot$$

$$\Big[1+\frac{n}{2}\left(\frac{e^2}{a^2}\right)\left(\frac{u^2}{a^2}\right)+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\left(\frac{e}{a}\right)^4\cdot$$

$$\left(\frac{u}{a}\right)^4+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot\frac{n+4}{6}\cdot\left(\frac{e}{a}\right)^6\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^6$$

$$+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot\frac{n+4}{6}\cdot\frac{n+6}{8}\cdot\left(\frac{e}{a}\right)^8\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^8$$

u. s. w.]

9°) In diesen Formeln: n nach und nach $=$ 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. gesetzt und die hierdurch erlangten rücksichtchen Werte der 1, 3, 5, 7 u. s. w. Potenzen von $\mathfrak{sub}\mathfrak{T}\beta$, $\mathfrak{sub}\sin\beta$, $\mathfrak{sub}\cos\mathfrak{T}.\beta$ und $\mathfrak{sub}\cos\beta$ rücksichtlich gehörig statt gesetzt, und alles, was nun in einerlei Potenz von $\frac{y}{c}$ oder rücksichtlich von $\frac{u}{a}$ multiplizirt ist, zu einander nach gehöriger Entwickelung geordnet; so wird man finden, daß die beiden an und für sich so verschieden geglaubten Formeln, den Ell. Bogen $\frac{a}{c}.\beta$ oder $\frac{c}{a}.\alpha$ aus seiner Subtangente und aus seinem Subsinus zu finden, eine und die dieselbe Formel geben, nach welcher er aus seiner Ordinate zu bestimmen ist. Indem man bedenkt, daß $e^2 = a^2 - e^2$ und also $c^2 = a^2 - e^2$ und dergl. ist.

Der Ausdruck $uc^2y^{-1}a^{-2}$ für die $\mathfrak{sub}\mathfrak{T}\alpha$ ist auf c als Sinustotus bezogen; allein auf a als Sinustotus oder Einheit bezogen wird aus ihm $(uc^2y^{-1}a^{-2})ac^{-1} = uc^{-1}y^{-1}a^{-1}$

$$\left(\frac{y}{c}\right)^5 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{a}{c} - \frac{1.3.5}{3.2.4}\frac{a^3}{c^3} + \frac{1.5}{5.2}\frac{a^5}{c^5} - \tfrac{1}{7}\cdot\frac{a^7}{c^7}\right)\left(\frac{y}{c}\right)^7 + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\right.$$

$$\left.\frac{a}{c} - \frac{1.3.5.7}{3.2.4.6}\frac{a^3}{c^3} + \frac{1.5.7}{5.2.4}\frac{a^5}{c^5} - \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{7}{2}\frac{a^7}{c^7} + \tfrac{1}{9}\frac{a^9}{c^9}\right)\left(\frac{y}{c}\right)^9 \text{ u. f. w.}$$

φ^o. (11°) $\frac{a}{c}\text{ell:arc}\beta = \frac{a}{c}\left(\frac{y}{c}\right) + \left(\frac{a}{c}\cdot\frac{3c^2-2a^2}{2.3.c^2}\right)\left(\frac{y}{c}\right)^3$

$$+\frac{a}{c}\left(\frac{1.3.3.5c^4 - 3.4.5a^2c^2 + 2.3.4a^4}{2.3.4.5c^4}\right)\left(\frac{y}{c}\right)^5$$

$$+\frac{a}{c}\left(\frac{1.3.5.3.5.7c^6 - 1.3.5.5.6.7a^2c^4 + 1.5.3.4.6.7a^4c^2 - 2.3.4.5.6a^6}{2.3.4.5.6.7c^6}\right).$$

$$\left(\frac{y}{c}\right)^7 + \frac{a}{c}\left(\frac{y}{c}\right)^9 \frac{c^{-8}}{2.3.4.5.6.7.8.9}(1.3.5.7.3.7.9c^8 - 3.5.7.3.7.8.9a^2c^6$$

$$+5.7.3.6.7.8.9a^4c^4 - 7.3.4.5.6.8.9a^6c^2 + 2.3.4.5.6.7.8a^8) \text{ u. f. w.}$$

10°.

ε°. (10°). Nämlich es ist einmal ell:arc $\beta =$

$$\frac{ya^2}{uc^2} = \frac{a}{c}\cdot\frac{y}{c} + \tfrac{1}{2}\frac{a}{c}\left(\frac{y}{c}\right)^3 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\frac{a}{c}\left(\frac{y}{c}\right)^5 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\frac{a}{c}\left(\frac{y}{c}\right)^7 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{7}{8}\frac{a}{c}\left(\frac{y}{c}\right)^9 \text{ u. f. w.}$$

$$-\tfrac{1}{3}\left(\frac{ya^2}{uc^2}\right)^3 = -\tfrac{1}{3}\frac{a^3}{c^3} - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{2}\frac{a^3}{c^3} - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{4}\frac{a^3}{c^3} - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{7}{6}\frac{a^3}{c^3}$$

$$+\tfrac{1}{5}\left(\frac{ya^2}{uc^2}\right)^5 = +\tfrac{1}{5}\frac{a^5}{c^5} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{5}{2}\frac{a^5}{a^5} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{7}{4}\frac{a^5}{c^5}$$

$$-\tfrac{1}{7}\left(\frac{ya^2}{uc^2}\right)^7 = -\tfrac{1}{7}\frac{a^7}{c^7} - \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{7}{2}\frac{a^7}{c^7}$$

$$+\tfrac{1}{9}\left(\frac{ya^2}{uc^2}\right)^9 = +\tfrac{1}{9}\frac{a^9}{c^9}$$

u. f. w. u. f. w.

$$\frac{a}{c}\text{ell:arc}\,\beta = \frac{a}{c}\cdot\frac{y}{c} + \left(\tfrac{1}{2}\frac{a}{c} - \tfrac{1}{3}\frac{a^3}{c^3}\right)\left(\frac{y}{c}\right)^3 + \left(\frac{1\cdot3}{2.4}\frac{a}{c} - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{2}\frac{a^3}{c^3} + \tfrac{1}{5}\frac{a^5}{c^5}\right)\left(\frac{y}{c}\right)^5 +$$

100. (12) Das andere Mal ist ell : arc $\beta =$

$$\frac{a}{y}\cdot\frac{y}{c}\left(1+\frac{e^2}{c^2}\cdot\frac{y^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{c}\cdot\frac{y}{c} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{e^2}{c^2}\left|\left(\frac{y}{c}\right)^3 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{e^4}{c^4}\right|\left(\frac{y}{c}\right)^5 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{e^6}{c^6}\left|\left(\frac{y}{c}\right)^7 + \frac{1.3.5.7}{2.3.4.5}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{e^8}{c^8}\right|\left(\frac{y}{c}\right)^9$$

$$+\frac{1.1}{2.3}\cdot\frac{a^3}{c^3}\cdot\frac{y^3}{c^3}\left(1+\frac{e^2}{c^2}\cdot\frac{y^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = +\frac{1.1}{2.3}\cdot\frac{a^3}{c^3}\left| - \frac{1.1.3}{2.3.2}\cdot\frac{a^3}{c^3}\cdot\frac{e^2}{c^2}\right| + \frac{1.1.3.5}{2.3.2.4}\cdot\frac{a^3}{c^3}\cdot\frac{e^4}{c^4}\left| - \frac{1.1.3.5.7}{2.3.2.4.6}\left(\frac{a}{c}\right)^3\frac{e^4}{a^6}\right|$$ u. s. w.

$$+\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(\frac{a}{c}\right)^5\left(\frac{y}{c}\right)^5\left(1+\frac{e^2}{c^2}\cdot\frac{y^2}{c^2}\right)^{-\frac{5}{2}} = \left| + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\cdot\frac{a^5}{c^5}\right| - \frac{1.1.3.3.5}{2.3.4.5.2}\cdot\frac{a^5}{c^5}\cdot\frac{e^2}{c^2}\left| + \frac{1.1.3.3.5.7}{2.3.4.5.2.4}\cdot\frac{a^5}{c^5}\cdot\frac{e^4}{c^4}\right|$$

$$+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{a}{c}\right)^7\left(\frac{y}{c}\right)^7\left(1+\frac{e^2}{c^2}\cdot\frac{y^2}{c^2}\right)^{-\frac{7}{2}} = \left| + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{a^7}{c^7}\right| - \frac{1.1.3.3.5.5.7}{2.3.4.5.6.7.2}\cdot\frac{a^7}{c^7}\cdot\frac{e^2}{c^2}\left|\right.$$

$$+\frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\left(\frac{a}{c}\right)^9\left(\frac{y}{c}\right)^9\left(1+\frac{e^2}{c^2}\cdot\frac{y^2}{c^2}\right)^{-\frac{9}{2}} = \left| + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot\frac{a^9}{c^9}\right|$$

u. s. w. u. s. w.

$$\frac{a}{c}\text{ell. arc}\,\beta = \frac{a}{c}\cdot\frac{y}{e} + \frac{a}{c}\left(\frac{a^2-3e^2}{2.3c^2}\right)\left(\frac{y}{c}\right)^3 + \frac{a}{c}\left(\frac{9a^4-2.3.5a^2e^2+3.3.5e^4}{2.3.4.5.c^4}\right)\cdot$$

$$\left(\frac{y}{c}\right)^5 + \frac{a}{c}\left(\frac{3^2.5^2a^6-3^2.5.3.7a^4e^2+3.5.5.3.7a^2e^4-3^2.5^2.7e^6}{2.3.4.5.6.7c^6}\right)\left(\frac{y}{c}\right)^7 +$$

$$+\frac{a}{c}(3^2.5^2.7^2a^8 - 3^2.5^2.7.4.9a^6e^2 +$$
$$3^2.5.7.6.7.9a^4e^4 - 3.5.7.5.7.4.9a^2e^6$$
$$+ 3.5.7.6.7.8.9e^8)\left(\frac{y}{c}\right)^9 \frac{c^{-8}}{2.3\ldots9}$$ u. s. w.

11°. (13°) Vergleicht man den Faktor, welcher in dieser zweiten Formel unter 10° in dieselbe Potenz von $\left(\frac{y}{a}\right)$ multiplizirt ist, mit jenem in der 1sten obigen Formel (9°) 11°. in ebendieselbe Potenz von $\left(\frac{y}{a}\right)$ multiplizirt, bedenkend daß $e^2 = a^2 - c^2$ und $c^2 = a^2 - e^2$, so findet sich, daß beide Faktorn im Grund ein und ebendieselbe Größe ausdrücken. Oder daß $\frac{a^2 - 3e}{2.3.c^2}$

$$= \frac{3c^2 - 2a^2}{2.3.c^2};\quad \left(\frac{1}{c^4}.\frac{9a^4 - 5.6.a^2e^2 + 3.3.5e^4}{2.3.4.5}\right)$$
$$= \left(\frac{a^4}{1.5} - \frac{a^2c^2}{1.2} + \frac{3.c^4}{2.4}\right)c^{-4};\quad \left(\frac{3.5}{2.4.6.7}a^6\right.$$
$$\left. - \frac{3}{4^2}a^4e^2 + \frac{5}{4.4}a^2e^4 - \frac{3.5}{2.4.6}e^6\right)c^{-6} =$$
$$\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}c^6 - \frac{5}{2.4}c^4a^2 + \tfrac{1}{2}c^2a^4 - \tfrac{1}{7}a^6\right)c^{-6};$$
$$(3^2.5^2.7^2a^8 - 3^2.5^2.6^2.7a^6e^2 + 3^2.5^2.7a^2e^4$$
$$- 3^2.5^2.7e^6)c^{-8} = (3^2.5^2.7^2.9c^8$$
$$- 3^2.5^2.7^2.4.6c^6a^2 + 5.7^2.3^2.3^2.4^2c^4a^4$$
$$- 3.4.5.6.7.8.9c^2a^6 + 2.3.4.5.6.7.8.a^8)c^{-8}$$

12°. (14°) Gehen wir einen Schritt zurück im Vergleichen und berücksichtigen die Werte für die Subtangente, d. h. für sub$\mathfrak{T}$: $\frac{a}{c}\beta = \frac{ya^2}{uc^2} = \frac{a}{c}.\frac{y}{c}\left(1 + \frac{y^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$= 1 -$ und

so weiß man auch die Größe des ParabelBogens zu finden. Die letzten Ausdrücke zeigen ja deutlich genug das Verfaren.

4°) Der Paraboliſche FlächenAusſchnitt AOM iſt dem ZirkelAusſchnitte gleich, welcher unter demſelben ∠AOM mit der mittlern Normale

$$= a(1 + \tfrac{1}{2}y^2a^{-2})^{\frac{1}{2}}(1 + y^2a^{-2})^{\frac{1}{4}}$$

beſchrieben würde, (weil der ParabelBogen dieſem ZirkelBogen gleich iſt)

$$\square AOM = (ya^{-1} - \tfrac{1}{3}y^3a^{-3} + \tfrac{1}{5}y^5a^{-5} - \tfrac{1}{7}y^7a^{-7} + \tfrac{1}{9}y^9a^{-9} \text{ u. ſ. w.}) \times \tfrac{1}{2}a^2(1 + \tfrac{1}{2}y^2a^{-2})(1 + y^2a^{-2})^{\frac{1}{2}}$$

alſo $\square MOQA = (\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{3}\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^3 + \tfrac{1}{5}\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^5 - \tfrac{1}{7}\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^7 + \tfrac{1}{9}\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^9 \text{ u. ſ. w.}) \times \tfrac{1}{2}a^2(2 + \mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^2).(1 + \mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi^2)^{\frac{1}{2}}$

Der FlächenRaum des Triangel MPQO iſt $= ya = a^2\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\varphi$
Dies abgezogen von dem vorigen FlächenRaume, giebt den FlächenRaum des paraboliſchen Abſchnitts MPQA

26. (30.) Nach jenen oft erwänten Schlüſſen und GrundSätzen iſt

$$1°)\ \frac{a}{c}\text{arc. ell. }\beta = \left\{\frac{ya^2}{uc^2} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{ya^2}{uc^2}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{ya^2}{uc^2}\right)^5 - \tfrac{1}{7}\left(\frac{ya^2}{uc^2}\right)^7 + \tfrac{1}{9}\left(\frac{ya^2}{uc^2}\right)^9 \text{ u. ſ. w.}\right\} \times (1 - e^2ua^{-3})^{\frac{1}{2}}(1 - e^2u^2a^{-4})^{\frac{1}{4}}(ac)^{\frac{1}{2}}.$$

arc:ell:β

$$= \left\{\frac{ya}{cu} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{ya}{cu}\right)^3 - \tfrac{1}{5}\left(\frac{ya}{cu}\right)^5 - \tfrac{1}{7}\left(\frac{ya}{cu}\right)^7 + \tfrac{1}{9}\left(\frac{ya}{cu}\right)^9 \text{ u. ſ. w.}\right\} (ac)^{\frac{1}{2}}(1 - e^2ua^{-3})^{\frac{1}{2}}.$$

$$(1 - e^2u^2a^{-4})^{\frac{1}{4}} = [yc^{-1}(1 - y^2c^{-2})^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{3}y^3c^{-3}.(1 - y^2c^{-2})^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{5}y^5c^{-5}(1 - y^2c^{-2})^{-\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{7}y^7c^{-7}(1 - y^2c^{-2})^{-\frac{7}{2}} + \tfrac{1}{9}y^9c^{-9}(1 - y^2c^{-2})^{-\frac{9}{2}} \text{ u. ſ. w.}].[ac(1 - e^2ua^{-3})(1 - e^2u^2a^{-4})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$$

arc:

$$\text{arc:ell.}\beta = \left[\frac{y}{c} + \frac{1\cdot1}{2\cdot3}\left(\frac{y}{c}\right)^3 + \frac{1\cdot1\cdot3\cdot3}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\left(\frac{y}{c}\right)^5 + \frac{1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\left(\frac{y}{c}\right)^7 \text{ u. s. w.}\right] \times$$
$$[ac(1 - e^2u^2a^{-4})^{\frac{1}{2}}(1 - e^2ua^{-3})]^{\frac{1}{2}}$$

2°) $\mathfrak{Da}\ \frac{\text{subsin}\beta}{\text{ord}\beta} = \frac{y}{c}(1 - e^2u^2a^{-4})^{-\frac{1}{2}}$
$= \sin\angle AOM = yac^{-2}(1 + e^2y^2c^{-4})^{\frac{1}{2}}$ so ist

$$\frac{a}{c}\text{arc. ell.}\beta = [yac^{-2}(1 + e^2y^2c^{-4})^{-\frac{1}{2}} +$$
$$\frac{1\cdot1}{2\cdot3}[yac^{-2}(1 + e^2y^2c^{-4})^{-\frac{1}{2}}]^3 + \frac{1\cdot1\cdot3\cdot3}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot$$
$$[yac^{-2}(1 + e^2y^2c^{-4})^{-\frac{1}{2}}]^5 + \frac{1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\cdot$$
$$[yac^{-2}(1 + e^2y^2c^{-4})^{-\frac{1}{2}}]^7 + \text{u. s. w.}] \times$$
$$[ac(1 - e^2u^2a^{-4})^{\frac{1}{2}}(1 - e^2ua^{-3})]^{\frac{1}{2}}$$

3°) $\frac{c}{a}\text{ell. arc.}\alpha = \frac{c}{a}\text{ell. arc.}(q - \beta) = \frac{uc^2}{ya^2}$
$$- \tfrac{1}{3}\left(\frac{uc^2}{ya^2}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{uc^2}{ya^2}\right)^5 - \tfrac{1}{7}\left(\frac{uc^2}{ya^2}\right)^7$$
$$+ \tfrac{1}{9}\left(\frac{uc^2}{ya^2}\right)^9 + \text{u. s. w.}] [ac(1 + e^2yc^{-3}).$$
$$(1 + e^2y^2c^{-4})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}. \quad \frac{c}{a}\text{ell:arc}\alpha = \frac{yc^2}{ya^2}$$
$$- \tfrac{1}{3}\left(\frac{uc^2}{ya^2}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{uc^2}{ya^2}\right)^5 - \tfrac{1}{7}\left(\frac{uc^2}{ya^2}\right)^7$$
$$+ \tfrac{1}{9}\left(\frac{uc^2}{ya^2}\right)^9 + \text{u. s. w.}] \times (ac)^{\frac{1}{2}}.(1 + c^2yc^{-3})^{\frac{1}{2}}.$$

$(1+e^2y^2c^{-4})^{\frac{1}{4}}$; ell:arc. $\alpha = \left[\frac{uc}{ay} - \frac{1}{3}\left(\frac{uc}{ay}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{uc}{ay}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{uc}{ay}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{uc}{ay}\right)^9 \text{ u. f. w.}\right]$.

$(1+e^2yc^{-3})^{\frac{1}{2}}(ac)^{\frac{1}{2}}(1+e^2y^2c^{-4})^{\frac{1}{4}}$

$= \left[\frac{u}{a} + \frac{1.1}{2.3}\left(\frac{u}{a}\right)^3 + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(\frac{u}{a}\right)^5 + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{u}{a}\right)^7 + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\left(\frac{u}{a}\right)^9 \text{ u. f. w.}\right]\left[ac(1+e^2yc^{-3})(1+e^2y^2c^{-4})^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$

Und da sub. cos. $\beta = uc(a^4 - e^2u^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= uca^{-2}(1 - e^2u^2a^{-4})^{-\frac{1}{2}}$

4°) $\frac{c}{a}$ ell:arc$(q - \beta)$

$= [(uc(1 - e^2u^2a^{-4})^{-\frac{1}{2}}a^{-2}) + \frac{1.1}{2.3}(uc.(1 - e^2u^2a^{-4})^{-\frac{1}{2}}a^{-2})^3 + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}(uc.(1 e^2u^2a^{-4})^{-\frac{1}{2}}a^{-2})^5 + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}(uc.(1 - e^2u^2a^{-4})^{-\frac{1}{2}}a^{-2})^7 \text{ u. f. w.}] \times [ac(1+e^2y^2c^{-4})^{\frac{1}{2}}.(1+e^2yc^{-3})]^{\frac{1}{2}}$

5°) Wiefern im Ausdruck für die Tangente oder den Sinus eines Bogens außer den veränderlichen Koordinaten noch eine beständige (ganze oder gebrochene) Größe als Faktor vorkömmt, so modifizirt diese beständige Größe das Verhältniß der Tangente, oder des Sinus zum Bogen nicht im geringsten, wenn eben dieses durch eine unendliche Reihe in einer Funktion der Tangente und des Sinus bestimmt wird.

Wird

Wird die Tangente und der Sinus ax^{-1} od. cu^{-1} mal grösser od. kleiner z. B., so wird es auch der Bogen: Und man hat in der Bestimmung des reinen Verhältnisses zwischen Tang. oder Sinus und Bogen solchen Faktor aus dem Ausdrucke one den geringsten Nachtheil für Richtigkeit und Schärfe gänzlich auszulassen; da der Radius, welcher in die Reihe zu multipliziren ist, die ware Größe doch erst bestimmt. Und selbst die Nettigkeit der Rechnung erheischt es, keine unnötige Package mit zu füren; höchstens diese beständige Größe sowol links als rechts, den Bogen sowol als die ganze Summe aller Glieder nur im Allgemeinen damit zu multipliziren und nicht in jeglichem Gliede diesen Faktor, in gleiche Potenz erhoben, mit anzuren, in welcher die übrigen auf ihre Einheit bezogenen veränderlichen Größen vorkommen, z. B. nicht $\left(\frac{a}{c}\right)^z \left(\frac{ya}{uc}\right)^z$ im 4ten Gliede zu setzen, da $\left(\frac{ya}{cu}\right)^z$ genügt und gleiches Resultat giebt.

Es ist $ya^2u^{-1}c^{-2}$ die, auf die $\frac{1}{2}$ große Akse a als Einheit = sin. totus reduzirte Größe der Tangente: wird aber auf die halbe kleine Akse c, als Einheit = sin. tot., die Größe der Tangente reduzirt, so erhält man one dem für ya^2uc^{-2} den Ausdruck $(ya^2u^{-1}c^{-2})ca^{-1} = yau^{-1}c^{-1}$

5°) Es ist $\mathfrak{T}\beta = \frac{ya}{cu}$ oder $\frac{a}{c}\mathfrak{T}\beta = \frac{ya}{cu}.\frac{a}{c}$

$\mathfrak{T} = \frac{a}{c}\beta$ Oder schlechtweg $\mathfrak{T}\beta^2 = \frac{y^2a^2}{c^2u^2} = \frac{y^2c^{-2}}{1-y^2c^{-2}}$

mithin $(yc^{-1}u^{-1}a)^n = (yc^{-1})^n(1-y^2c^{-2})^{-\frac{n}{2}}$

$$= \left(\frac{y}{c}\right)^n + \frac{n}{2}\left(\frac{y}{c}\right)^{n+2} + \frac{n(n+2)}{2\ 4}\left(\frac{y}{c}\right)^{n+4}$$

$$+ \frac{n}{2}.\frac{n+2}{4}.\frac{n+4}{6}\left(\frac{y}{c}\right)^{n+6} \text{ u. s. w. eben so}$$

(u

$$\left(\frac{u}{a}\right)^n\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)^{-\frac{n}{2}}=\left(\frac{u}{a}\right)^n+\frac{n}{2}\left(\frac{u}{a}\right)^{n+2}$$
$$+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\left(\frac{y}{c}\right)^{n+4}+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot$$
$$\frac{n+4}{6}\left(\frac{u}{a}\right)^{n+6}$$ u. s. w. Es ist auch

$$\left(\frac{ya^2}{ya^2}\right)=\frac{a}{c}\cdot\frac{y}{c}\cdot(1-y^2c^{-2})^{-\frac{1}{2}}$$ mithin

$$\left(\frac{ya^2}{uc^2}\right)^n=\left(\frac{y}{c}\right)^n\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^n\cdot\left[1+\frac{n}{2}\left(\frac{y}{c}\right)^2\right.$$
$$+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\left(\frac{y}{c}\right)^4+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot\frac{n+4}{6}\cdot$$
$$\left(\frac{y}{c}\right)^6+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot\frac{n+4}{6}\cdot\frac{n+6}{8}\left(\frac{y}{c}\right)^8$$
u. s. w.]

6°) Ferner ist $\frac{a}{c}\left(\frac{y}{c}\right)^n\left(1+\frac{e^2}{c^2}\cdot\frac{y^2}{c^2}\right)^{-\frac{n}{2}}$
$$=\left(\frac{a}{c}\right)^n\cdot\left(\frac{y}{c}\right)^n\cdot\left[1-\frac{n}{2}\frac{e^2}{c^2}\frac{y^2}{c^2}+\frac{n}{2}\cdot\right.$$
$$\frac{n+2}{4}\cdot\frac{e^4}{c^4}\frac{y^4}{c^4}-\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot\frac{n+4}{6}\cdot\frac{e^6}{c^6}\cdot$$
$$\frac{y^6}{c^5}+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot\frac{n+4}{6}\cdot\frac{n+6}{8}\cdot\frac{e^8}{c^8}\cdot\frac{y^8}{c^8}$$
u. s. w.]

7°) Und eben so ist $\left(\frac{uc^2}{ya^2}\right)^n=\left(\frac{c}{a}\right)^n\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^n\cdot$
$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)^{-\frac{n}{2}}=\left(\frac{c}{a}\right)^n\left(\frac{u}{a}\right)^n\cdot\left[1+\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^2\right.$$
$$+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\left(\frac{u}{a}\right)^4+\frac{u}{a}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot\frac{n+4}{6}\left(\frac{u}{a}\right)^6+$$

$$+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot\frac{n+4}{6}\cdot\frac{n+6}{8}\left(\frac{u}{a}\right)^8 \text{ u. s. w.}\Big]$$

8°) Nach dem Binomium entwickelt, erhält man ebenfalls

$$\left(\frac{c}{a}\cdot\frac{u}{a}\left(1-\frac{e^2}{a^2}\cdot\frac{u^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^n = \left(\frac{c}{a}\right)^n\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^n\cdot$$

$$\Big[1+\frac{n}{2}\left(\frac{e^2}{a^2}\right)\left(\frac{u^2}{a^2}\right)+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\left(\frac{e}{a}\right)^4\cdot$$

$$\left(\frac{u}{a}\right)^4+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot\frac{n+4}{6}\cdot\left(\frac{e}{a}\right)^6\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^6$$

$$+\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{4}\cdot\frac{n+4}{6}\cdot\frac{n+6}{8}\cdot\left(\frac{e}{a}\right)^8\cdot\left(\frac{u}{a}\right)^8$$

u. s. w.]

9°) In diesen Formeln: n nach und nach = 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. gesetzt und die hierdurch erlangten rücksichtchen Werte der 1, 3, 5, 7 u. s. w. Potenzen von subTβ, subsinβ, subcoT.β und subcosβ rücksichtlich gehörig statt gesetzt, und alles, was nun in einerlei Potenz von $\frac{y}{c}$ oder rücksichtlich von $\frac{u}{a}$ multiplizirt ist, zu einander nach gehöriger Entwickelung geordnet; so wird man finden, daß die beiden an und für sich so verschieden geglaubten Formeln, den Ell. Bogen $\frac{a}{c}.\beta$ oder $\frac{c}{a}.\alpha$ aus seiner Subtangente und aus seinem Subsinus zu finden, eine und die dieselbe Formel geben, nach welcher er aus seiner Ordinate zu bestimmen ist. Indem man bedenkt, daß $e^2 = a^2 - e^2$ und also $c^2 = a^2 - e^2$ und dergl. ist.

Der Ausdruck $uc^2y^{-1}a^{-2}$ für die subTα ist auf c als Sinustotus bezogen; allein auf a als Sinustotus oder Einheit bezogen wird aus ihm $(uc^2y^{-1}a^{-2})ac^{-1} = uc^{-1}y^{-1}a^{-1}$

$$\left(\frac{y}{c}\right)^5 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{a}{c} - \frac{1.3.5}{3.2.4}\frac{a^3}{c^3} + \frac{1.5}{5.2}\frac{a^5}{c^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{a^7}{c^7}\right)\left(\frac{y}{c}\right)^7 + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\right.$$

$$\left.\frac{a}{c} - \frac{1.3.5.7}{3.2.4.6}\frac{a^3}{c^3} + \frac{1.5.7}{5.2.4}\frac{a^5}{c^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{7}{2}\frac{a^7}{c^7} + \frac{1}{9}\frac{a^9}{c^9}\right)\left(\frac{y}{c}\right)^9 \text{ u. f. w.}$$

$$\text{e}^{\text{o}}.\ (11^{\text{o}})\quad \frac{a}{c}\text{ell:arc}\beta = \frac{a}{c}\left(\frac{y}{c}\right) + \left(\frac{a}{c}\cdot\frac{3c^2-2a^2}{2.3.c^2}\right)\left(\frac{y}{c}\right)^3$$

$$+\frac{a}{c}\left(\frac{1.3.3.5c^4 - 3.4.5a^2c^2 + 2.3.4a^4}{2.3.4.5c^4}\right)\left(\frac{y}{c}\right)^5$$

$$+\frac{a}{c}\left(\frac{1.3.5.3.5.7c^6 - 1.3.5.5.6.7a^2c^4 + 1.5.3.4.6.7a^4c^2 - 2.3.4.5.6a^6}{2.3.4.5.6.7c^6}\right).$$

$$\left(\frac{y}{c}\right)^7 + \frac{a}{c}\left(\frac{y}{c}\right)^9 \frac{c^{-8}}{2.3.4.5.6.7.8.9}(1.3.5.7.3.7.9c^8 - 3.5.7.3.7.8.9a^2c^6$$

$$+5.7.3.6.7.8.9a^4c^4 - 7.3.4.5.6.8.9a^6c^2 + 2.3.4.5.6.7.8a^8) \text{ u. f. w.}$$

10°.

ε°. (100). Nämlich es ist einmal ell:arc $\beta =$

$$\frac{ya^2}{uc^2} = \frac{a}{c}\cdot\frac{y}{c} + \tfrac{1}{2}\frac{a}{c}\left(\frac{y}{c}\right)^3 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\frac{a}{c}\left(\frac{y}{c}\right)^5 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\frac{a}{c}\left(\frac{y}{c}\right)^7 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{7}{8}\frac{a}{c}\left(\frac{y}{c}\right)^9 \text{ u. s. w.}$$

$$-\tfrac{1}{3}\left(\frac{ya^2}{uc^2}\right)^3 = -\tfrac{1}{3}\frac{a^3}{c^3} - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{2}\frac{a^3}{c^3} - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{4}\frac{a^3}{c^3} - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{7}{6}\frac{a^3}{c^3}$$

$$+\tfrac{1}{5}\left(\frac{ya^2}{uc^2}\right)^5 = +\tfrac{1}{5}\frac{a^5}{c^5} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{5}{2}\frac{a^5}{a^5} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{7}{4}\frac{a^5}{c^5}$$

$$-\tfrac{1}{7}\left(\frac{ya^2}{uc^2}\right)^7 = -\tfrac{1}{7}\frac{a^7}{c^7} - \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{7}{2}\frac{a^7}{c^7}$$

$$+\tfrac{1}{9}\left(\frac{ya^2}{uc^2}\right)^9 = +\tfrac{1}{9}\frac{a^9}{c^9}$$

u. s. w. u. s. w.

$$\frac{a}{c}\text{ell:arc}\,\beta = \frac{a}{c}\cdot\frac{y}{c} + \left(\tfrac{1}{2}\frac{a}{c} - \tfrac{1}{3}\frac{a^3}{c^3}\right)\left(\frac{y}{c}\right)^3 + \left(\frac{1\cdot3}{2.4}\frac{a}{c} - \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{2}\frac{a^3}{c^3} + \tfrac{1}{5}\frac{a^5}{c^5}\right)\text{u. s. w.}\left(\frac{y}{c}\right)^5.$$

100. (12) Das andere Mal ist ell : arc $\beta =$

$$\frac{a}{y}\cdot\frac{y}{c}\left(1+\frac{e^2}{c^2}\cdot\frac{y^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{c}\cdot\frac{y}{c} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{e^2}{c^2}\left(\frac{y}{c}\right)^3 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{e^4}{c^4}\left(\frac{y}{c}\right)^5 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{e^6}{c^6}\left(\frac{y}{c}\right)^7 + \frac{1.3.5.7}{2.3.4.5}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{e^8}{c^8}\left(\frac{y}{c}\right)^9$$

$$+\frac{1.1}{2.3}\cdot\frac{a^3}{c^3}\cdot\frac{y^3}{c^3}\left(1+\frac{e^2}{c^2}\cdot\frac{y^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = +\frac{1.1}{2.3}\cdot\frac{a^3}{c^3} - \frac{1.1.3}{2.3.2}\cdot\frac{a^3}{c^3}\cdot\frac{e^2}{c^2} + \frac{1.1.3.5}{2.3.2.4}\cdot\frac{a^3}{c^3}\cdot\frac{e^4}{c^4} - \frac{1.1.3.5.7}{2.3.2.4.6}\left(\frac{a}{c}\right)^3\frac{e^4}{a^6}$$

$$+\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(\frac{a}{c}\right)^5\left(\frac{y}{c}\right)^5\left(1+\frac{e^2}{c^2}\cdot\frac{y^2}{c^2}\right)^{-\frac{5}{2}} = +\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\cdot\frac{a^5}{c^5} - \frac{1.1.3.3.5}{2.3.4.5.2}\cdot\frac{a^5}{c^5}\cdot\frac{e^2}{c^2} + \frac{1.1.3.3.5.7}{2.3.4.5.2.4}\cdot\frac{a^5}{c^5}\cdot\frac{e^4}{c^4}$$

$$+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{a}{c}\right)^7\left(\frac{y}{c}\right)^7\left(1+\frac{e^2}{c^2}\cdot\frac{y^2}{c^2}\right)^{-\frac{7}{2}} = +\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{a^7}{c^7} - \frac{1.1.3.3.5.5.7}{2.3.4.5.6.7.2}\cdot\frac{a^7}{c^7}\cdot\frac{e^2}{c^2}$$

$$+\frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\left(\frac{a}{c}\right)^9\left(\frac{y}{c}\right)^9\left(1+\frac{e^2}{c^2}\cdot\frac{y^2}{c^2}\right)^{-\frac{9}{2}} = +\frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot\frac{a^9}{c^9}$$

u. s. w. u. s. w. u. s. w.

$$\frac{a}{c}\text{ell. arc}\,\beta = \frac{a}{c}\cdot\frac{y}{e} + \frac{a}{c}\left(\frac{a^2-3e^2}{2.3c^2}\right)\left(\frac{y}{c}\right)^3 + \frac{a}{c}\left(\frac{9a^4-2.3.5a^2e^2+3.3.5e^4}{2.3.4.5.c^4}\right)\cdot$$

$$\left(\frac{y}{c}\right)^5 + \frac{a}{c}\left(\frac{3^2.5^2a^6-3^2.5.3.7a^4e^2+3.5.5.3.7a^2e^4-3^2.5^2.7e^6}{2.3.4.5.6.7c^6}\right)\left(\frac{y}{c}\right)^7 +$$

$$+\frac{a}{c}(3^2.5^2.7^2a^8 - 3^2.5^2.7.4.9a^6e^2 + 3^2.5.7.6.7.9a^4e^4 - 3.5.7.5.7.4.9a^2e^6 + 3.5.7.6.7.8.9e^8)\left(\frac{y}{c}\right)^9 \frac{c^{-8}}{2.3\ldots9}$$ u. s. w.

11°. (13°) Vergleicht man den Faktor, welcher in dieser zweiten Formel unter 10° in dieselbe Potenz von $\left(\frac{y}{a}\right)$ multiplizirt ist, mit jenem in der 1sten obigen Formel (9°) 11°. in ebendieselbe Potenz von $\left(\frac{y}{a}\right)$ multiplizirt, bedenkend daß $e^2 = a^2 - c^2$ und $c^2 = a^2 - e^2$, so findet sich, daß beide Faktorn im Grund ein und ebendieselbe Größe ausdrücken. Oder daß $\frac{a^2 - 3e}{2.3.c^2}$

$$= \frac{3c^2 - 2a^2}{2.3.c^2}; \left(\frac{1}{c^4}.\frac{9a^4 - 5.6.a^2e^2 + 3.3.5e^4}{2.3.4.5}\right)$$

$$= \left(\frac{a^4}{1.5} - \frac{a^2c^2}{1.2} + \frac{3.c^4}{2.4}\right)c^{-4}; \left(\frac{3.5}{2.4.6.7}a^6 - \frac{3}{4^2}a^4e^2 + \frac{5}{4.4}a^2e^4 - \frac{3.5}{2.4.6}e^6\right)c^{-6} =$$

$$\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}c^6 - \frac{5}{2.4}c^4a^2 + \tfrac{1}{2}c^2a^4 - \tfrac{1}{7}a^6\right)c^{-6};$$

$$(3^2.5^2.7^2a^8 - 3^2.5^2.6^2.7a^6e^2 + 3^2.5^2.7a^2e^4 - 3^2.5^2.7e^6)c^{-8} = (3^2.5^2.7^2.9c^8 - 3^2.5^2.7^2.4.6c^6a^2 + 5.7^2.3^2.3^2.4^2c^4a^4 - 3.4.5.6.7.8.9c^2a^6 + 2.3.4.5.6.7.8.a^8)c^{-8}$$

12°. (14°) Gehen wir einen Schritt zurück im Vergleichen und berücksichtigen die Werte für die Subtangente, d. h. für subT: $\frac{a}{c}\beta = \frac{ya^2}{uc^2} = \frac{a}{c}.\frac{y}{c}\left(1 + \frac{y^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

und

$$ac^{-1}[ac(1-e^2u^2a^{-4})^{\frac{1}{2}}(1-e^2ua^{-3})]^{-\frac{1}{2}}.\text{ell:arc:}\beta$$

$$=\frac{a}{c}\left[\frac{y}{c}+\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}-\frac{1}{3}\end{matrix}\right|\left(\frac{y}{c}\right)^3-\frac{1.3}{2.4}\left|\begin{matrix}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\\+\frac{1}{5}\end{matrix}\right|\left(\frac{y}{c}\right)^5+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left|\begin{matrix}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3.5}{2.4}\\+\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2}\\-\frac{1}{7}\end{matrix}\right|\left(\frac{y}{c}\right)^7-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left|\begin{matrix}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3.5.7}{2.4.6}\\+\frac{1}{5}\cdot\frac{5.7}{2.4}\\-\frac{1}{7}\cdot\frac{7}{2}\end{matrix}\right|\left(\frac{y}{c}\right)^9\text{ u. [.w.]}\right]$$

$$(\text{norm:med:}\beta)^{-1}\text{ell:arc:}\beta=\left[\frac{y}{c}+\frac{1.1}{2.3}\left(\frac{y}{c}\right)^3+\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(\frac{y}{c}\right)^5\right.$$

$$+$$

$$[(1-e^2u^2a^{-4})^{\frac{1}{2}}ac(1-e^2ua^{-3})]^{\frac{1}{2}}\text{ und da }\frac{ya}{cu}$$

$$=\frac{y}{c}\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\text{ [.]}$$

setzt und alles, was in einer Potenz von $y\,c^{-1}$ multiplizirt ist, zu einander geordnet.

$$+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{y}{c}\right)^7+\frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot$$

$$\left(\frac{y}{c}\right)^9 \text{u. s. w.}+\frac{1.1.3.3.5.5\ldots(2n-1)^2}{2.3.4.5.6.7\ldots 2n(2n+1)}\cdot$$

$$\left(\frac{y}{c}\right)^{2n+1} \text{u. s. w.}\Big] = \mathfrak{X}\, a c^{-1}(ac)^{\frac{1}{2}}(1-e^2 u a^{-3})^{\frac{1}{2}}$$

$(1-e^2u^2a^{-4})^{\frac{1}{4}}$ Wenn gleichfalls

$$a c^{-1}(\text{norm}:\text{med}:\beta)^{-1}.\text{ell}:\text{arc}:\beta = \Big[\frac{a}{c}.\frac{y}{c}.$$

$$(1+e^2 y c^{-4})^{-\frac{1}{2}}+\frac{1.1}{2.3}\left(\frac{a}{c}\right)^3\left(\frac{y}{c}\right)^3(1+e^2y^2c^{-4})^{-\frac{3}{2}}$$

$$+\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(\frac{a}{c}\right)^5\left(\frac{y}{c}\right)^5(1+e^2y^2c^{-4})^{-\frac{5}{2}}$$

$$+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{a}{c}\right)^7\left(\frac{y}{c}\right)^7(1+e^2y^2c^{-4})^{-\frac{7}{2}}$$

$$+\frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\left(\frac{a}{c}\right)^9\left(\frac{y}{c}\right)^9(1+e^2y^2c^{-4})^{-\frac{9}{2}}$$

$$++\ldots+\frac{1.1.3.3\ldots.(2n-1)^2}{2.3.4.5\ldots.2n(2n+1)}\left(\frac{a}{c}\right)^{2n+1}\cdot$$

$$\left(\frac{y}{c}\right)^{2n+1}(1+e^2y^2c^{-4})^{-\frac{2n+1}{2}} \text{u. s. w.}\Big] \text{ zu}$$

setzen ist, so ist $a c^{-1}.\text{ell}:\text{arc}:\beta = \text{norm}:\text{med}:\beta\frac{a}{c}\cdot$

$$\Big[\frac{y}{c}\left(1+\frac{e^2y^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1.1}{2.3}\left(\frac{y}{c}\right)^3\left(1+\frac{e^2y^2}{c^4}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$+\frac{1.1.3.3}{2.3.4.4}\left(\frac{y}{c}\right)^5\left(1+\frac{e^2y^2}{c^4}\right)^{-\frac{5}{2}}+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\cdot$$

(y

und für den Subsinus, d. h. für subsin: $\frac{a}{c}\beta = \frac{a}{c}$.

$\frac{y}{c}\left(1+\frac{e^2}{c^2}\cdot\frac{y^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, so finden wir in beiden denselben beständigen Faktor $\frac{a}{c}$ und denselben gleich veränderlichen Faktor $\frac{y}{c}$. Wir wissen aber, daß, wenn Sinus und Tangente desselben Bogens durch ebendenselben Faktor zugleich gemerfacht wird; der Radius sowol, wie jene, wodurch des Bogens Wert (doppelt) gegeben ist, als auch dieser Bogen selbst durch denselben Faktor zu merfachen ist, daß sonach, wenn $\mathfrak{T}\gamma = \frac{y}{u}\cdot\frac{a}{c} =$

$\frac{y}{c}\left(1-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ und $\sin\gamma = \frac{y}{c}\left(1+\frac{e^2}{c^2}\cdot\frac{y^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

$\text{sub}\mathfrak{T}\beta = \mathfrak{T}\frac{a}{c}\gamma = \frac{a}{c}\cdot\frac{y}{c}\left(1-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{c}\mathfrak{T}\gamma$

und $\text{sub}\sin\beta = \sin\frac{a}{c}\gamma = \frac{a}{c}\cdot\frac{y}{c}\left(1+\left(\frac{y}{c}\right)^2\frac{e^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{a}{c}\sin\gamma$

13°. (15°) Denn wäre dies gemeinsame $\frac{a}{c}$fache hier nicht der Fall, so würde sich $\text{tang}:\sin\beta$ aus dem Verhältnis von der Stattsetzung ihrer Werte, wie $= \sin\beta.\cos\beta^{-1}:\sin\beta = 1:\cos\beta$ der Wert für $\cos\beta$ nicht so ergeben, wie er oben durch die Rechnung gefunden worden ist, was ein gültiger Erweis wäre, nämlich $\text{tang}\beta:\sin\beta = \frac{a}{c}$.

$\frac{y}{c}\left(1-y^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}:\frac{a}{c}\cdot\frac{y}{c}.\left(1+e^2y^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$= 1:$

$= 1 : \cos\beta$, wenn der Radius $= \frac{a}{c} R = 1$ gesetzt wird, weil hier alles auf die Einheit reduzirt erscheint und bloße Verhältnisse giebt. $\cos\beta = \frac{(1 + e^2 y^2 c^{-4})^{-\frac{1}{2}}}{(1 - y^2 c^{-2})^{-\frac{1}{2}}}$.

$= u a^{-1} (1 + e^2 y^2 c^{-4})^{-\frac{1}{2}} = u a^{-1} (1 + (a^2 c^{-2} - 1)(1 - u^2 a^{-2}))^{-\frac{1}{2}} = u a^{-1} (1 - 1 + u^2 a^{-2} + a^2 c^{-2} - u^2 a^{-2} a^2 c^{-2})^{-\frac{1}{2}} = u a^{-1} c (a^2 - e^2 u^2 a^{-2})^{-\frac{1}{2}} = u c a^{-2} (1 - e^2 u^2 a^{-4})^{-\frac{1}{2}} =$ $\cos\beta$ gerade der halbe Wert, den die Rechnung ergab.

14°. (16°) Wenn also, wie längst in der Elementar-Geometrie erwießen ist, der Bogen $\frac{a}{c}$fach oder $\frac{c}{a}$fach wird, wenn und wiefern seine Tangente und sein Sinus es zu gleichen Momenten werden; sofern sind denn folgende Schluß-Folgen richtig, war und unantastbar. —

$$\frac{a}{c}\text{ell} : \text{arc}\,\beta = \left[\frac{y a^2}{u c^2} - \frac{1}{3}\left(\frac{y a^2}{u c^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y a^2}{u c^2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{y a^2}{u c^2}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{y a^2}{u c^2}\right)^9 \text{ u. s. w.}\right] \text{ norm. med } \beta$$

$$= \left(\frac{a}{c} \cdot \frac{y a}{c u} - \frac{1}{3}\frac{a^3}{c^3}\left(\frac{y a}{c u}\right)^3 + \frac{1}{5}\frac{a^5}{c^5}\left(\frac{y a}{c u}\right)^5 - \frac{1}{7}\frac{a^7}{c^7}\left(\frac{y a}{c u}\right)^7 + \frac{1}{9}\frac{a^9}{c^9}\left(\frac{y a}{c u}\right)^9 \text{ u. s. w.}\right).$$

$$[a c (1 - e^2 u a^{-3})(1 - e^2 u^2 a^{-4})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{a}{c}\text{ell} : \text{arc}\,\beta = \frac{a}{c}\left[\frac{y a}{c u} - \frac{1}{3}\left(\frac{y a}{c u}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y a}{c u}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{y a}{c u}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{y a}{c u}\right)^9 \text{ u. s. w.}\right].$$

[(1

$$\mathrm{ac}^{-1}[\mathrm{ac}(1-e^2u^2a^{-4})^{\frac{1}{2}}(1-e^2ua^{-3})]^{-\frac{1}{2}}.\mathrm{ell:arc:}\beta$$

$$=\frac{a}{c}\left[\frac{y}{c}+\frac{1}{2}\left|\left(\frac{y}{c}\right)^3-\frac{1.3}{2.4}\right|\left(\frac{y}{c}\right)^5+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left|\left(\frac{y}{c}\right)^7-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right|\left(\frac{y}{c}\right)^9 \text{ u. s. w.}\right]$$

$$-\frac{1}{3}\left| \quad -\frac{1}{3}.\frac{3}{2}\right| \quad -\frac{1}{3}.\frac{3.5}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{3}.\frac{3.5.7}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{5}\left| \quad +\frac{1}{5}.\frac{5}{2}\right| \quad +\frac{1}{5}.\frac{5.7}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{5}.\frac{5.7.9}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{7}\left| \quad -\frac{1}{7}.\frac{7}{2}\right| \quad -\frac{1}{7}.\frac{7.9}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{7}.\frac{7.9.11}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{9}\left| \quad +\frac{1}{9}.\frac{9}{2}\right| \quad +\frac{1}{9}.\frac{9.11}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{9}.\frac{9.11.13}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{11}\left| \quad -\frac{1}{11}.\frac{11}{2}\right| \quad -\frac{1}{11}.\frac{11.13}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{11}.\frac{11.13.15}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{13}\left| \quad +\frac{1}{13}.\frac{13}{2}\right| \quad +\frac{1}{13}.\frac{13.15}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{13}.\frac{13.15.17}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{15}\left| \quad -\frac{1}{15}.\frac{15}{2}\right| \quad -\frac{1}{15}.\frac{15.17}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{15}.\frac{15.17.19}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{17}\left| \quad +\frac{1}{17}.\frac{17}{2}\right| \quad +\frac{1}{17}.\frac{17.19}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{17}.\frac{17.19.21}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{19}\left| \quad -\frac{1}{19}.\frac{19}{2}\right| \quad -\frac{1}{19}.\frac{19.21}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{19}.\frac{19.21.23}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{21}\left| \quad +\frac{1}{21}.\frac{21}{2}\right| \quad +\frac{1}{21}.\frac{21.23}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{21}.\frac{21.23.25}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{23}\left| \quad -\frac{1}{23}.\frac{23}{2}\right| \quad -\frac{1}{23}.\frac{23.25}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{23}.\frac{23.25.27}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{25}\left| \quad +\frac{1}{25}.\frac{25}{2}\right| \quad +\frac{1}{25}.\frac{25.27}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{25}.\frac{25.27.29}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{27}\left| \quad -\frac{1}{27}.\frac{27}{2}\right| \quad -\frac{1}{27}.\frac{27.29}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{27}.\frac{27.29.31}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{29}\left| \quad +\frac{1}{29}.\frac{29}{2}\right| \quad +\frac{1}{29}.\frac{29.31}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{29}.\frac{29.31.33}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{31}\left| \quad -\frac{1}{31}.\frac{31}{2}\right| \quad -\frac{1}{31}.\frac{31.33}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{31}.\frac{31.33.35}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{33}\left| \quad +\frac{1}{33}.\frac{33}{2}\right| \quad +\frac{1}{33}.\frac{33.35}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{33}.\frac{33.35.37}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{35}\left| \quad -\frac{1}{35}.\frac{35}{2}\right| \quad -\frac{1}{35}.\frac{35.37}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{35}.\frac{35.37.39}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{37}\left| \quad +\frac{1}{37}.\frac{37}{2}\right| \quad +\frac{1}{37}.\frac{37.39}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{37}.\frac{37.39.41}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{39}\left| \quad -\frac{1}{39}.\frac{39}{2}\right| \quad -\frac{1}{39}.\frac{39.41}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{39}.\frac{39.41.43}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{41}\left| \quad +\frac{1}{41}.\frac{41}{2}\right| \quad +\frac{1}{41}.\frac{41.43}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{41}.\frac{41.43.45}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{43}\left| \quad -\frac{1}{43}.\frac{43}{2}\right| \quad -\frac{1}{43}.\frac{43.45}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{43}.\frac{43.45.47}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{45}\left| \quad +\frac{1}{45}.\frac{45}{2}\right| \quad +\frac{1}{45}.\frac{45.47}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{45}.\frac{45.47.49}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{47}\left| \quad -\frac{1}{47}.\frac{47}{2}\right| \quad -\frac{1}{47}.\frac{47.49}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{47}.\frac{47.49.51}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{49}\left| \quad +\frac{1}{49}.\frac{49}{2}\right| \quad +\frac{1}{49}.\frac{49.51}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{49}.\frac{49.51.53}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{51}\left| \quad -\frac{1}{51}.\frac{51}{2}\right| \quad -\frac{1}{51}.\frac{51.53}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{51}.\frac{51.53.55}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{53}\left| \quad +\frac{1}{53}.\frac{53}{2}\right| \quad +\frac{1}{53}.\frac{53.55}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{53}.\frac{53.55.57}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{55}\left| \quad -\frac{1}{55}.\frac{55}{2}\right| \quad -\frac{1}{55}.\frac{55.57}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{55}.\frac{55.57.59}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{57}\left| \quad +\frac{1}{57}.\frac{57}{2}\right| \quad +\frac{1}{57}.\frac{57.59}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{57}.\frac{57.59.61}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{59}\left| \quad -\frac{1}{59}.\frac{59}{2}\right| \quad -\frac{1}{59}.\frac{59.61}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{59}.\frac{59.61.63}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{61}\left| \quad +\frac{1}{61}.\frac{61}{2}\right| \quad +\frac{1}{61}.\frac{61.63}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{61}.\frac{61.63.65}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{63}\left| \quad -\frac{1}{63}.\frac{63}{2}\right| \quad -\frac{1}{63}.\frac{63.65}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{63}.\frac{63.65.67}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{65}\left| \quad +\frac{1}{65}.\frac{65}{2}\right| \quad +\frac{1}{65}.\frac{65.67}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{65}.\frac{65.67.69}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{67}\left| \quad -\frac{1}{67}.\frac{67}{2}\right| \quad -\frac{1}{67}.\frac{67.69}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{67}.\frac{67.69.71}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{69}\left| \quad +\frac{1}{69}.\frac{69}{2}\right| \quad +\frac{1}{69}.\frac{69.71}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{69}.\frac{69.71.73}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{71}\left| \quad -\frac{1}{71}.\frac{71}{2}\right| \quad -\frac{1}{71}.\frac{71.73}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{71}.\frac{71.73.75}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{73}\left| \quad +\frac{1}{73}.\frac{73}{2}\right| \quad +\frac{1}{73}.\frac{73.75}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{73}.\frac{73.75.77}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{75}\left| \quad -\frac{1}{75}.\frac{75}{2}\right| \quad -\frac{1}{75}.\frac{75.77}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{75}.\frac{75.77.79}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{77}\left| \quad +\frac{1}{77}.\frac{77}{2}\right| \quad +\frac{1}{77}.\frac{77.79}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{77}.\frac{77.79.81}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{79}\left| \quad -\frac{1}{79}.\frac{79}{2}\right| \quad -\frac{1}{79}.\frac{79.81}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{79}.\frac{79.81.83}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{81}\left| \quad +\frac{1}{81}.\frac{81}{2}\right| \quad +\frac{1}{81}.\frac{81.83}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{81}.\frac{81.83.85}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{83}\left| \quad -\frac{1}{83}.\frac{83}{2}\right| \quad -\frac{1}{83}.\frac{83.85}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{83}.\frac{83.85.87}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{85}\left| \quad +\frac{1}{85}.\frac{85}{2}\right| \quad +\frac{1}{85}.\frac{85.87}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{85}.\frac{85.87.89}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{87}\left| \quad -\frac{1}{87}.\frac{87}{2}\right| \quad -\frac{1}{87}.\frac{87.89}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{87}.\frac{87.89.91}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{89}\left| \quad +\frac{1}{89}.\frac{89}{2}\right| \quad +\frac{1}{89}.\frac{89.91}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{89}.\frac{89.91.93}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{91}\left| \quad -\frac{1}{91}.\frac{91}{2}\right| \quad -\frac{1}{91}.\frac{91.93}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{91}.\frac{91.93.95}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{93}\left| \quad +\frac{1}{93}.\frac{93}{2}\right| \quad +\frac{1}{93}.\frac{93.95}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{93}.\frac{93.95.97}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{95}\left| \quad -\frac{1}{95}.\frac{95}{2}\right| \quad -\frac{1}{95}.\frac{95.97}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{95}.\frac{95.97.99}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{97}\left| \quad +\frac{1}{97}.\frac{97}{2}\right| \quad +\frac{1}{97}.\frac{97.99}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{97}.\frac{97.99.101}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{99}\left| \quad -\frac{1}{99}.\frac{99}{2}\right| \quad -\frac{1}{99}.\frac{99.101}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{99}.\frac{99.101.103}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{101}\left| \quad +\frac{1}{101}.\frac{101}{2}\right| \quad +\frac{1}{101}.\frac{101.103}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{101}.\frac{101.103.105}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{103}\left| \quad -\frac{1}{103}.\frac{103}{2}\right| \quad -\frac{1}{103}.\frac{103.105}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{103}.\frac{103.105.107}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{105}\left| \quad +\frac{1}{105}.\frac{105}{2}\right| \quad +\frac{1}{105}.\frac{105.107}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{105}.\frac{105.107.109}{2.4.6}\right|$$

$$-\frac{1}{107}\left| \quad -\frac{1}{107}.\frac{107}{2}\right| \quad -\frac{1}{107}.\frac{107.109}{2.4}\left| \quad -\frac{1}{107}.\frac{107.109.111}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1}{109}\left| \quad +\frac{1}{109}.\frac{109}{2}\right| \quad +\frac{1}{109}.\frac{109.111}{2.4}\left| \quad +\frac{1}{109}.\frac{109.111.113}{2.4.6}\right|$$

$$+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{y}{c}\right)^7+\frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot$$

$$\left(\frac{y}{c}\right)^9 \text{u. f. w.}+\frac{1.1.3.3.5.5\ldots(2n-1)^2}{2.3.4.5.6.7\ldots 2n(2n+1)}\cdot$$

$$\left(\frac{y}{c}\right)^{2n+1} \text{u. f. w.}] = \mathfrak{X}\, a\, c^{-1}(ac)^{\frac{1}{2}}(1-e^2 u\, a^{-3})^{\frac{1}{2}}$$

$(1-e^2u^2a^{-4})^{\frac{1}{4}}$ Wenn gleichfalls

$$a\,c^{-1}(\text{norm:med:}\beta)^{-1}.\text{ell:arc:}\beta = [\frac{a}{c}.\frac{y}{c}.$$

$$(1+e^2yc^{-4})^{-\frac{1}{2}}+\frac{1.1}{2.3}\left(\frac{a}{c}\right)^3\left(\frac{y}{c}\right)^3(1+e^2y^2c^{-4})^{-\frac{3}{2}}$$

$$+\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(\frac{a}{c}\right)^5\left(\frac{y}{c}\right)^5(1+e^2y^2c^{-4})^{-\frac{5}{2}}$$

$$+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{a}{c}\right)^7\left(\frac{y}{c}\right)^7(1+e^2y^2c^{-4})^{-\frac{7}{2}}$$

$$+\frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\left(\frac{a}{c}\right)^9\left(\frac{y}{c}\right)^9(1+e^2y^2c^{-4})^{-\frac{9}{2}}$$

$$++\ldots+\frac{1.1.3.3\ldots.(2n-1)^2}{2.3.4.5\ldots.2n(2n+1)}\left(\frac{a}{c}\right)^{2n+1}.$$

$$\left(\frac{y}{c}\right)^{2n+1}(1+e^2y^2c^{-4})^{-\frac{2n+1}{2}} \text{u. f. w.}] \text{ zu}$$

setzen ist, so ist $a\,c^{-1}.\text{ell:arc:}\beta = \text{norm:med:}\beta\,\frac{a}{c}$.

$$[\frac{y}{c}\left(1+\frac{e^2y^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1.1}{2.3}\left(\frac{y}{c}\right)^3\left(1+\frac{e^2y^2}{c^4}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$+\frac{1.1.3.3}{2.3.4.4}\left(\frac{y}{c}\right)^5\left(1+\frac{e^2y^2}{c^4}\right)^{-\frac{5}{2}}+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\cdot$$

(y

$\left(\frac{y}{c}\right)^7\left(1+\frac{e^2y^2}{c^4}\right)^{-\frac{7}{2}}+\frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot$
$\left(\frac{y}{c}\right)^9\left(1+\frac{e^2y^2}{c^4}\right)^{-\frac{9}{2}}$ u. s. w.] so ist zu bedenken, daß dieser Ausdruck den Ell. Bogen aus seinem subsin: zu finden mit dem aus seiner Subtang. zu finden nach der Entwickelung dasselbe Resultat gaben und daß also norm: med: β als $= 1$ zu achten und zu setzen ist. —

15°. (17°) Nach derselben SchlußFolge ist dann

ca^{-1}. ell: arc$(q-\beta) = ca^{-1}$. ell: arc: α

$$= \left[\frac{c}{a}\left(\frac{uc}{ay}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{c}{a}\right)^3\left(\frac{uc}{ay}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{c}{a}\right)^5\left(\frac{uc}{ay}\right)^5\right.$$
$$\left.-\frac{1}{7}\left(\frac{c}{a}\right)^7\left(\frac{uc}{ay}\right)^7+\frac{1}{9}\left(\frac{c}{a}\right)^9\left(\frac{uc}{ay}\right)^9 \text{ u. s. w.}\right].$$

norm: med: α; ell. arc: $\alpha = (ac)^{\frac{1}{2}}(1+e^2yc^{-3})^{\frac{1}{2}}\cdot$
$(1+e^2y^2c^{-4})^{\frac{1}{4}}\left[\frac{u}{a}(1-u^2a^{-2})^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\left(\frac{u}{a}\right)^3\cdot\right.$
$(1-u^2a^{-2})^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}\left(\frac{u}{a}\right)^5\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)^{-\frac{5}{2}}-\frac{1}{7}\left(\frac{u}{a}\right)\cdot$
$\left.\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)^{-\frac{7}{2}}+\frac{1}{9}\left(\frac{u}{a}\right)^9\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)^{-\frac{9}{2}} \text{ u. s. w.}\right]$

und nach völliger Entwickelung ell: arc$(q-\beta) =$
ell: arc $\alpha = (1+e^2yc^{-3})^{\frac{1}{2}}(ca)^{\frac{1}{2}}(1+e^2y^2c^{-2})^{\frac{1}{2}}\cdot$
$\left[\frac{u}{a}+\frac{1.1}{2.3}\left(\frac{u}{a}\right)^3+\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(\frac{u}{a}\right)^5\right.$
$+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{u}{a}\right)^7+\frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\cdot$
$\left.\left(\frac{u}{a}\right)^9 \text{ u. s. w.}\right] = \mathfrak{Y}\cdot[(1+e^2yc^{-3})ac(1+e^2y^2c^{-4})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$

Wird

Wird hier $u = a$, erreicht es sein Größtes, so wäre $\alpha = q$ gleich dem Quadranten von der Ellipse und $y = o$ oder Null und dann wird aus norm:med:α

$= [(1 + e^2 y c^{-3}) a c (1 + e^2 y^2 c^{-4})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$; norm:med:$\alpha$

$= (ac)^{\frac{1}{2}}$ ell:arc:$q = [1 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$

u. s. w.$]$ $(ac)^{\frac{1}{2}}$

Der Ellipsen-Quadrant ist also einem Zirkel-Quadranten gleich, dessen Radius das geometrische Mittel zwischen dem großen und kleinen Halbmesser a und c der Ellipse hält.

Es kann auch einmal $u = y$ werden im Ellips. Quadranten und dann wäre $y^2 c^{-2} = 1 - y^2 a^{-2}$, $y^2 = (a^2 + c^2)^{-1} a^2 c^2$; $y = ac(a^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}} = u$ also $\frac{u}{a} = c(a^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}}$, und $\frac{y}{c} = a(a^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}}$; diese Werte kann man stattsetzen und man erhält auch durch Addition Ausdrücke für den ganzen Ellipsen-Quadranten.

27°. (31°) Da ferner $\frac{y}{c} = \left(\frac{2x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(4\frac{x}{2a} - 4\frac{x^2}{4a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \left(\frac{x}{2a}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

wo x die Abszisse, vom Scheitel an, bedeutet, und wenn $\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} = \sin\delta$ gesetzt wird, so ist $\sin 2\delta = 2\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}$.

$\left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}$ also $\sin 2\delta = 2\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}$

und wenn $2\delta = \beta$ also $\sin 2\delta = \sin\beta = \frac{y}{c}$ so ist rückwärts geschlossen $\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}$ notwendig $\sin\frac{1}{2}\beta$ also ell:arc β

$= 2[\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3}\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{5}{2}}$

+

$$+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{7}{2}}+\frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{9}{2}}$$

u. s. w.] $\times$ $[(1-e^2(a-x)a^{-3})ac(1-e^2.(a-x)^2a^{-4})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$

28°. (32°) Wenn und wiefern also

$$\text{ell:arc}\,\beta=[\frac{y}{c}+\frac{1.1}{2.3}\left(\frac{y}{c}\right)^3+\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(\frac{y}{c}\right)^5.$$

$$.....+\frac{1.1.3.3....(2n-1)^2(2n+1)^2}{2.3.4.5....(2n+2)(2n+3)}\left(\frac{y}{c}\right)^{2n+3}$$

u. s. w.] norm:med:β oder $=2[\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1.1}{2.3}.$

$$\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{5}{2}}....$$

$$+\frac{1.1.3.3...(2n-1)^2(2n+1)^2}{2.3.4.5...(2n+2)(2n+3)}\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{2n+3}{2}}\text{ u. s. w.}]$$

$\times$ norm:med:β So und sofern ist der ZirkelBogen am gleich großen Radius von gleicher WinkelOefnung am Fokus F oder

$$\text{circ:arc:}\sigma=+R\frac{a}{c}[\frac{y}{c}+\frac{1.1}{2.3}\left(\frac{y}{c}\right)^3+\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}.$$

$$\left(\frac{y}{c}\right)^5+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{y}{c}\right)^7\text{ u. s. w.}]$$

$$+R\frac{c}{c}[\frac{y}{c}-\tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{c}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{y}{c}\right)^5$$

$$-\tfrac{1}{7}\left(\frac{y}{c}\right)^7+-\text{u. s. w.}]$$

In dem einen Theil dieser Funktion ist die Ordinate als Sinus, in dem andern als Tangente behandelt und gebraucht.

2°) Oder

2°) Oder der ZirkelBogen auf dem Fokus als Zentrum bezogen, verhält sich zum EllipsenBogen, wie die WinkelOefnung an denselben zur WinkelOefnung an den Punkten der Peripherie, welchen Ordinate und Tangente mit einander machen. Oder vielmer nach folgenden Schlüssen.

In (ε, 6°) ist oben die Tangente vom $\frac{1}{2}\angle MFf$ oder

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}\psi = R\left(\frac{a-e}{a+e}\cdot\frac{a+u}{a-u}\right)^{\frac{1}{2}} = R\frac{a-e}{c}\cdot\frac{y}{c}\cdot\frac{a}{x}$$

$$= \frac{c}{a+e}\cdot\frac{c}{y}\cdot\frac{2a-x}{a}R \text{ und da } \tfrac{1}{2}\angle AFm = 1$$

rechten Winkel $-\ \frac{1}{2}\angle MFf$ oder $\text{tang}\frac{1}{2}\angle AFM = \cot\frac{1}{2}\angle MFf$; so ist, wenn $\angle AFM = \sigma$, $\text{tang}\frac{1}{2}\sigma$

$$= (\text{tang}\tfrac{1}{2}\psi)^{-1} = \frac{c}{a-e}\cdot\frac{c}{y}\cdot\frac{x}{a}R = \frac{a+e}{c}\cdot\frac{y}{c}\cdot$$

$$\frac{a}{2a-x}R = \frac{c}{a-e}\left(\frac{x^2}{2ax-x^2}\right)^{\frac{1}{2}}R = \frac{c}{a-e}\cdot$$

$$\left(\frac{x}{2a-x}\right)^{\frac{1}{2}}R = \frac{c}{a-e}\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}R$$

$$= \frac{a+e}{c}\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}R = \mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\sigma R$$

Mithin da $\sigma = 2R[\mathfrak{T}\frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{3}(\mathfrak{T}\frac{1}{2}\sigma)^3 + \frac{1}{5}(\mathfrak{T}\frac{1}{2}\sigma)^5$

$- \frac{1}{7}(\mathfrak{T}\frac{1}{2}\sigma)^7 + \frac{1}{9}(\mathfrak{T}\frac{1}{2}\sigma)^9$ u. s. w.$] = 2R[\frac{c}{a-e}\cdot$

$$\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{c}{a-e}\right)^3\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot$$

$$\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}\left(\frac{c}{a-e}\right)^5\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{5}{2}}\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$- \frac{1}{7}\left(\frac{c}{a-e}\right)^7\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{7}{2}}\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{7}{2}} \text{ u. s. w.}]$$

3°) Da aber eine beständige Größe außer dem veränderlichen Werte für die Tangente nichts im Ausdrucke des Verhältnisses der Größe des Bogens durch die Tangente gegeben ändert und er als unnützes Gepäcke aus der Formel für den Bogen aus seiner Tangente zu finden heraus zu lassen ist, wenn nur die ganze Reihe in den rechten Radius multiplizirt wird; oder weil unter gleichen WinkelOefnungen ZirkelBögen von verschiedenen Radien, die Bögen und ihre Sinusse, Tangenten u. s. w. unter demselben merenden oder mindernden Verhältnisse stehen, oder weil der Bogen ein $\frac{c}{a-e}$facher wird, wie sich Sinus und Tangente $\frac{c}{a-e}$fachen; so wird:

$$\sigma = 2R\left[\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{3}{2}}\right.$$
$$\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{5}{2}}\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{7}\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{7}{2}}.$$
$$\left.\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{7}{2}} + \frac{1}{9}\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{9}{2}}\left(1-\right)^{-\frac{9}{2}} \text{ u. s. w.}\right].$$

Jetzt alles etwickelt und das, was in einerlei Potenz von $\left(\frac{x}{2a}\right)$ multiplizirt ist, zu einander geordnet, giebt

$$\sigma = 2R\left[\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{7}{2}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{9}{2}} \text{ u. s. w.}\right]$$

$$\left|\begin{array}{l} -\frac{1}{3} \\ \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} \\ \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 4} \\ \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} -\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 4\cdot 6} \\ \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{l} +\frac{1}{5} \\ \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} +\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2} \\ \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} +\frac{1\cdot 5\cdot 7}{5\cdot 2\cdot 4} \\ \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{l} -\frac{1}{7} \\ \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} -\frac{1}{7}\cdot\frac{7}{2} \\ \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{l} +\frac{1}{9} \\ \end{array}\right|$$

$$\sigma = 2R\left[\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1\cdot 1}{2\cdot 3}\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{7}{2}}\right.$$

$$\left.\text{u. s. w.}\right] = R.\mathfrak{X} \text{ wo } \mathfrak{X} \text{ das Doppelte des Bogens bedeutet, dessen Sinus} = \left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ ist.}$$

4°) Wenn aber oben in 25. (29) 1° ell : arc $\beta = \mathfrak{X}(ac)^{\frac{1}{2}}$. $(1 - e^2(a-x)a^{-3})^{\frac{1}{2}}(1 - e^2(a-x)^2a^{-4})^{\frac{1}{4}}$ und hier circ : arc : $\angle AFM = \mathfrak{X}(a-e)$; (wenn $R = AF = a - e$; oder $= \mathfrak{X}.(a - eua^{-1})$; wenn $R = FM = (a - eua^{-1})$; gefunden ward; so verhalten sich Ellipsen- und ZirkelBögen von einerlei WinkelOefnung am Fokus F zu einander oder ell : arc. β : circ : arc : $\angle AFM = \mathfrak{X}.(a-e)$ oder $\mathfrak{X}(a - e(a-x)a^{-1}) : (ac)^{\frac{1}{2}}(1 - e^2(a-x)a^{-3})^{\frac{1}{2}}$. $(1 - e^2(a-x)^2a^{-4})^{\frac{1}{4}}$. $\mathfrak{X}$ $(a - eua^{-1}) : (ac)^{\frac{1}{2}}(1 - e^2ua^{-3})^{\frac{1}{2}}(1 - e^2u^2a^{-4})^{\frac{1}{4}}$

Dies die verlangte ekszentrische Vergleichung zwischen EllipsenBogen und ZirkelBogen am Fokus.

29°. (33°) Wenn mit der halben großen Akse a als Radius ein Zirkel um die Ellipse so beschrieben wird, daß die beiden Scheitel an der großen Akse in die Peripherie des Zirkels fallen; so ist der MittelPunkt der Ellipse, zugleich MittelPunkt dieses Zirkels. Unter gleichen WinkelOefnungen an diesem gemeinsamen ZentralPunkte ist dann die Tangente für den ZirkelBogen vom $\angle ACM$ mit $\varkappa$ bezeichnet und den Radius auf die Einheit gesetzt. $= yu^{-1} = \mathfrak{T}\varkappa a^{-1}$; Also $= ya^{-1}(1 - y^2c^{-2})^{-\frac{1}{2}}$

$\varkappa = a[ya^{-1}(1 - y^2c^{-2})^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}y^3a^{-3}(1 - y^2c^{-2})^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}y^5a^{-5}(1 - y^2c^{-2})^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{7}y^7a^{-7}(1 - y^2c^{-2})^{-\frac{7}{2}}$ u. s. w.] Und nach geschehener Entwickelung bekanntlich

(°4

k =

$$x = a\left[y a^{-1} + \frac{3 \cdot a^2}{2 \cdot 3} - \frac{2 \cdot c^2}{2 \cdot 3}\right] y^3 a^{-3} c^{-2} + \frac{a^4 3^2 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{a^2 c^2 3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{c^4 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\Big] y^5 a^{-5} c^{-4} + \frac{a^6 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{c^2 a^4 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{c^4 a^2 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{c^6 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}\Big] y^7 a^{-7} c^6 \text{ u. f. w.}\Big]$$

Qiea

$$x = y\left[1 + \frac{3a^2 - 2c^2}{2 \cdot 3 a^2} y^2 c^{-2} + \frac{(3^2 \cdot 5 a^4 - 3 \cdot 4 \cdot 5 a^2 c^2 + 2 3 \cdot 4 c^4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 a^4} y^4 c^{-4}\right.$$

$$\left. + (a^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 - a^4 c^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 6 \cdot 7 + a^2 c^4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 - c^6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) \frac{y^6 c^{-6} a^{-6}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}\right.$$

$$\left. \text{u. f. w.}\right]$$

Dies giebt die verlangte konzentrische Vergleichung zwischen EllipsenBogen mit dem ZirkelBogen am MittelPunkte an die Hand.

2E°. (34°) Die beiden Normalen OM und OA oder XM und XD eines EllipsenBogens AM oder MD bilden als rücksichtliche senkrechte Radien mit ihrem Ell. Bogen einen EllipsenAusschnitt, dessen FlächenRaum gleich dem FlächenRaume eines ZirkelAusschnitts, dessen Radius die mittlere geometrische Normale aus beiden Normalen ist, von gleicher WinkelOefnung AOM oder MXD.

1°) oder $\square$ sect: AOM $= [y c^{-1} + \frac{1.1}{2.3} y^3 c^{-3} + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5} y^5 c^{-5} + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7} y^7 c^{-7}$ u. s. w.] $\times$ $\frac{1}{2}$(norm: med: β)$^2 = [y c^{-1} + \frac{1.1}{2.3} y^3 c^{-3} + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5} y^5 c^{-5} + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7} y^7 c^{-7}$ u. s. w.] $\times$ $\frac{1}{2}$(ac). $(1 - e^2 u a^{-3})(1 - e^2 u^2 a^{-4})^{\frac{1}{2}}$

2°) $\square$ sect. MXD $= [u a^{-1} + \frac{1.1}{2.3} u^3 a^{-3} + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5} u^5 a^{-5} + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7} u^7 a^{-7}$ u. s. w.] $\times$ $\frac{1}{2}$ a c $(1 + e^2 y^2 c^{-4})^{\frac{1}{2}} (1 + e^2 y c^{-3})$

3°) Wird $y = c$ so wird $u = o$ Null und $1 - e^2 u a^{-3} = 1$; auch $(1 - e^2 u^2 a^{-4})^{\frac{1}{2}} = 1$; oder wird $u = a$ so ist $y = o$, Null und $1 + e^2 y c^{-3} = 1$ auch $(1 + e^2 y^2 c^{-4})^{\frac{1}{2}} = 1$ und rücksichtlich jegliche unendliche Reihe verwandelt sich in jene, den Quadranten aus den Sinustotus zu finden: Oder man erhält, wenn $\pi =$ den Halbkreis des Zirkels, $\square$ sect. ACD $=$ ell. quad: $= \frac{1}{4}\pi$. ac Mithin der FlächenInhalt der ganzen Ellipse AMDBdA $= 4\frac{1}{4}$ ac $\pi =$ ac π, ist dem FlächenInhalte eines Zirkels gleich, dessen Radius das

geo-

geometrische Mittel aus der halben großen und kleinen Akse ist.

4°) Um den FlächenRaum des zentralen Ellipsen-Ausschnitts ACM zu bestimmen, hat man den Flächen-Raum vom △ MOC zu bestimmen und diesen zum FlächenRaum des Sektors AOM zu addiren. Des △MOC Basis ist = AC − AO = a − (a − $e^2 ua^{-2}$) = $e^2 ua^{-2}$ dessen senrechte Höhe = PM = y, also der Flächen-Raum vom △MOC = $\frac{1}{2} yue^2 a^{-2}$

5°) Der FlächenRaum des zentralen EllipsenAusschnitts MCD ist gleich dem FlächenRaume vom ekszentrischen Sektor MXD in 2° weniger dem FlächenRaume des △MXC.

Dieses △MXC Basis ist aber = DX − DC = c + $e^2 yc^{-2}$ − c = $e^2 yc^{-2}$, dessen senkrechte Höhe = ML = u; also der FlächenRaum des △MXC = $\frac{1}{2} e^2 yuc^{-2}$, dies ist also die Größe, welche vom □ des Sektors MXD abgezogen werden muß, um den □ des Sektors MCD zu erhalten.

6°) Der FlächenRaum des EllipsenAbschnittes MAQPM ergiebt sich, wenn man vom doppelten □ des Sektors AOM in 1°, den doppelten FlächenRaum des △MPO abzieht: vom △MPO ist aber die Basis PO = $uc^2 a^{-2}$, die Höhe = PM = y also □ (△MPO) = $\frac{1}{2} yuc^2 a^{-2}$ mithin □ (△MPQO) = $yuc^2 a^{-2}$, welches die abzuziehende Größe ist.

7°) Des EllipsenAbschnitt MDNLM FlächenRaum kömmt der Differenz vom □ des 2fachen Ell. Sektors MXD in 2° den doppelten FlächenRaum des △MXL abgezogen, gleich; oder □MDNLM = 2□MXD − 2□MLNX. Nun ist aber vom △MXL die Basis LX = $ya^2 c^{-2}$ die Höhe = ML = u also □ (△MXL) = $\frac{1}{2} uya^2 c^{-2}$ und der □ (△MLNXM) = $uya^2 c^{-2}$

Soweit von der Rektifikation und Quadratur der Ellipse one jene Differenzial- und IntegralRechnungen und den püthagoräischen LerSatz mit ins Spiel zu bringen.

2ℓ°. (35°) Die Tangente A'T auf der Quernormale OA senkrecht aufstehend mißt dieselbe WinkelOefnung AOM am untern Ende A, welche die Tangente MT auf der obern Normale OM am andern oder obern Ende des Hüperbel-

Bogens AM oder die die Subtangente PT auf der Ordinate MP für ∠TMP mißt.

Wie bereits oben gezeigt und erwießen worden, so hält der HüperbelBogen AM das Mittel zwischen dem ZirkelBogen, dessen Tangente A'T und Radius OA, und dem ZirkelBogen, dessen Tangente MT und Radius OM ist. Es kömmt also darauf an, den Wert der Tangente für diese ∠Oefnung AOM auf die Einheit des Radius reduzirt zu wissen. Es drückt ihn die Subtangente PT durch die Ordinate y dividirt genau aus $y^2 u^{-1} c^{-2} a^2 y^{-1} = y a^2 u^{-1} c^{-2} = y c^{-1} (u a^{-1})^{-1} (a c^{-1})$ *). Wir wissen aber schon bei der EllipseRektifikation, daß, wenn im Werte für die Tangente und für den Sinus eines und desselben Winkels eine beständige Größe als Faktor vorkömmt, dadurch im Verhältnis der Tangente oder des Sinus zu seinem ∠Bogen nichts geändert wird, wenn man solchen Faktor gänzlich aus dem Werte für die Tangente oder den Sinus ausläßt, wenn durch diese der zugehörige Bogen in einer unendlichen Reihe gefunden werden soll. Es ist

$$R^{-1}\,\mathrm{hyp:arc:}\beta = \left[\frac{a}{c}\cdot\frac{y}{c}\cdot\frac{a}{u} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{a}{c}\cdot\frac{y}{c}\cdot\frac{a}{u}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{a}{c}\cdot\frac{y}{c}\cdot\frac{a}{u}\right)^5 - \tfrac{1}{7}\left(\frac{a}{c}\cdot\frac{y}{c}\cdot\frac{a}{u}\right)^7 + \tfrac{1}{9}\left(\frac{a}{c}\cdot\frac{y}{c}\cdot\frac{a}{u}\right)^9 - + \text{u. s. w.}\right] \text{ oder } = \frac{y}{c}\cdot\frac{a}{u} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{c}\cdot\frac{a}{u}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{y}{c}\cdot\frac{a}{u}\right)^5 - \tfrac{1}{7}\left(\frac{y}{c}\cdot\frac{a}{u}\right)^7 + \tfrac{1}{9}\left(\frac{y}{c}\cdot\frac{a}{u}\right)^9 + -$$

u. s. w. Man beachtet nun hier in beiden Fällen, daß $u a^{-1} = (1 + y^2 c^{-2})^{\frac{1}{2}}$ und $e = (a^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$ oder $y^2 c^{-2} u^{-2} a^2 = y^2 c^{-2} (1 + y^2 c^{-2})^{-\frac{1}{2}}$

2°) Den ∠MCP am (negativen) MittelPunkte der Hüperbel, (dessen Tangente $= \frac{\mathrm{ord:hyp:}\beta}{\mathrm{absc:hyp:}\beta}$ d. h. gleich dem Bruche, dessen Zäler die Ordinate und dessen Nenner die

*) Wird dieser Wert von T∠AOM statt wie hier c als Einheit auf a als Einheit bezogen, so wird daraus $y c^{-1} u^{-1} a$ weil dann $a c^{-1}$ daraus wegfällt.

die Abszisse aus dem MittelPunkte der Hüperbel ist) hat man dem ∠ MCP am (positiven) MittelPunkte der Ellipse von gleichen, großen und kleinen, Akſen gleich zu achten, deſſen Tangente $= \frac{\text{ord}:\text{ell}:\beta}{\text{absc}:\text{ell}:\beta}$ d. h. der Zäler ist die Ordinate auf der halben großen Akſe und der Nenner, die Abszisse aus dem MittelPunkt auf der halben kleinen Akſe. Oder

$$\frac{\text{ord}:\text{hyp}:\text{arc}:\beta}{\text{absc}:\text{hyp}:\text{arc}:\beta} \cdot \frac{a}{c} = \frac{a}{c}\text{tang}\beta = \frac{\text{ord}:\text{ell}:\text{arc}:\beta}{\text{absc}:\text{ell}:\text{arc}:\beta} \frac{a}{c}$$

$$\frac{y c^{-1}}{(1 + y^2 c^{-2})^{\frac{1}{2}}} = \frac{c^{-1}\,\text{ord}:\text{hyp}:\beta}{(1 + c^{-2}(\text{ord}:\text{hyp}:\beta)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{c^{-1}\,\text{ord}:\text{ell}:\beta}{(1 - c^{-2}(\text{ord}:\text{ell}:\beta)^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y\,a}{uc}$$ in obiger Formel.

3°) Subſtituirt man nun dieſen Wert von $\frac{y}{c} \cdot \frac{a}{u}$ oder von $\frac{y}{c} \cdot \frac{a}{u} \cdot \frac{a}{c}$ in der Formel für den HüperbelBogen, ſo ergiebt ſich, daß

$$R^{-1}\,\text{hyp}:\text{arc}:\beta = (\text{norm}:\text{med}:\text{hyp}:\text{arc}:\beta)^{-1} \cdot$$

$$\text{hyp}:\text{arc}:\beta = \left[\frac{\text{ord}:\text{ell}:\beta}{c} + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3}\left(\frac{\text{ord}:\text{ell}:\beta}{c}\right)^3\right.$$

$$+ \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\left(\frac{\text{ord}:\text{ell}:\beta}{c}\right)^5 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot$$

$$\left.\left(\frac{\text{ord}:\text{ell}:\beta}{c}\right)^7 \text{u. ſ. w.}\right] = (\text{norm}:\text{med}:\text{ell}:\text{arc}:\beta)^{-1} \times$$

$\text{ell}:\text{arc}:\beta$ Oder

$$\frac{\text{hyp}:\text{arc}:\beta}{\text{norm}:\text{med}:\text{hyp}:\beta} = \frac{\text{ell}:\text{arc}:\beta}{\text{norm}:\text{med}:\text{ell}:\beta}$$ Oder

hyp:

$$\text{hyp:arc:}\beta = \frac{\text{norm:med:hyp:}\beta}{\text{norm:med:ell:}\beta}\,\text{ell:arc:}\beta$$

4°) Der FlächenRaum des HüperbelAusschnittes AOM ist also

$$= \tfrac{1}{2}(\text{norm:med:hyp:}\beta)^2 \frac{\text{ell:arc:}\beta}{\text{norm:med:ell:}\beta}$$

Oder $\text{sector hyp:}\beta = (\text{sector ell:}\beta)\cdot\frac{(\text{norm:med:hyp:}\beta)^2}{(\text{norm:med:ell:}\beta)^2}$

5°) Damit keine Zweideutigkeit oder Verwechselung statt finden könne, so bedeute u der Hüperbel Abszisse aus dem MittelPunkte, y die senkrechte Ordinate derselben, dagegen v der Ellipse Abszisse aus dem MittelPunkte und w der Ellipse senkrechte Ordinate: beide verwandte Koordinaten bilden einerlei WinkelDefnung am MittelPunkte; so verhält sich $u:y = v:w$ und $y^2 c^{-2} = u^2 a^{-2} - 1$, $w^2 c^{-2} = 1 - v^2 a^{-2}$

6°) Ferner $\frac{y^2 c^{-2}}{u^2 a^{-2}} = \frac{u^2 a^{-2} - 1}{u^2 a^{-2}} = 1 - a^2 u^{-2}$

$= \frac{w^2 c^{-2}}{v^2 a^{-2}} = \frac{1 - v^2 a^{-2}}{v^2 a^{-2}} = a^2 v^{-2} - 1$ also

$1 - a^2 u^{-2} = a^2 v^{-2} - 1$; $v^{-2} a^2 = 2 - a^2 u^{-2}$;

$v^2 = a^2 (2 - a^2 u^{-2})^{-1} = a^2 u^2 (2u^2 - a^2)^{-1}$;

$a^2 u^{-2} = 2 - v^{-2} a^2$; $u^2 = a^2 v^2 (2v^2 - a^2)^{-1}$;

$v^2 a^{-2} = u^2 a^{-2} (2u^2 a^{-2} - 1)^{-1}$

7°) Nun ist oben $\text{norm:med:ell:}\beta = (ac)^{\frac{1}{2}}\cdot (1 - v(a^2 - c^2)a^{-3})^{\frac{1}{2}} (1 - v^2 (a^2 - c^2) a^{-4})^{\frac{1}{4}}$

und nach 17 (19) 8° $\text{norm:med:hyp:}\beta = (ac)^{\frac{1}{2}}\cdot (u(a^2 + e^2)a^{-3} - 1)^{\frac{1}{2}} (u^2 (a^2 + c^2) a^{-4} - 1)^{\frac{1}{4}}$

Das eine Mal statt v dessen Wert in eine Funktion von u in die erste Größe für die mittlere Normale des Ellipsen-Bogens β; das andere Mal statt u dessen Wert in eine Funk-

Funktion von v nach 7° in die zweite Größe gesetzt; so ergeben sich die nachfolgenden Formeln für den HüperbelBogen

norm: med. ell. $\beta = (ac)^{\frac{1}{2}}(1-(a^2-c^2)(2-a^2u^{-2})^{-\frac{1}{2}}.$
$a^{-2})^{\frac{1}{2}} \times (1-(a^2-c^2)(2-a^2u^{-2})^{-1}a^{-2})^{\frac{1}{4}}$
$= (ac)^{\frac{1}{2}}[2-a^2u^{-2})^{\frac{1}{2}}-1+c^2a^{-2}]^{\frac{1}{2}} \times$
$(2-a^2u^{-2}-1+c^2a^{-2})^{\frac{1}{4}}(2-a^2u^{-2})^{-\frac{1}{2}}$
norm: med: hyp: $\beta = (ac)^{\frac{1}{2}}[a^{-2}v(2v^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}.$
$(a^2+c^2)-1]^{\frac{1}{2}}[v^2(2v^2-a^2)^{-1}(a^2+c^2).$
$a^{-2}-1]^{\frac{1}{4}} = (ac)^{\frac{1}{2}}[v(1+c^2a^{-2})-(2v^2-a^2)^{\frac{1}{2}}].$
$[v^2+v^2c^2a^{-2}-2v^2+a^2]^{\frac{1}{4}}(2v^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}$
$= ac^{\frac{1}{2}}[v+vc^2a^{-2}-(2v^2-a^2)^{\frac{1}{2}}][1-(a^2-c^2).$
$v^2a^{-4}]^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{2}}(2v^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}$

8°) hyp: arc: $\beta = \frac{(ac)^{\frac{1}{2}}}{ac^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(u(a^2+c^2)a^{-3}-1)^{\frac{1}{2}}}{(1-(a^2-c^2)va^{-3})^{\frac{1}{2}}}$

$\frac{(1-v^2(a^2-c^2)a^{-4})^{\frac{1}{4}}(2v^2a^{-2}-1)^{-\frac{1}{4}}}{(1-v^2(a^2-c^2)a^{-4})^{\frac{1}{4}}}$ ell: arc. β

$= \frac{(u(a^2+c^2)a^{-3}-1)^{\frac{1}{2}}}{(1-(a^2-c^2)va^{-3})^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{v^{\frac{1}{2}}}$ ell: arc: β

$= \frac{[v(a^2+c^2)a^{-3}-(2v^2a^{-2}a-1)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}}{(1-(a^2-c^2)va^{-3})^{\frac{1}{2}}}$.

$(2a^2a^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$ ell: arc: β

9°) hyp: arc: $\beta = \frac{[2va^{-1}-(2v^2a^{-2}-1)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}}{(2v^2a^{-2}-1)^{\frac{1}{2}}}$.

circ: β wenn $a = c$ die Ellipse zum Zirkel und die Hüperbel zur gleichseitigen wird, dann ist aber in $(2v^2a^{-2}-1)^{\frac{1}{2}}$ $va^{-1} = \cos\beta$ uud $2v^2a^{-2}-1 = \cos 2\beta$ also

hyp:

$$\text{hyp:arc:}\beta = \frac{(2\cos\beta - (\cos 2\beta)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{(\cos 2\beta)^{\frac{1}{2}}} \text{ circ:}\beta$$

$$= (2\cos\beta - (1 - t\beta^2)^{\frac{1}{2}}(1 + t\beta^2)^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}.$$

$$(1 + t\beta^2)^{\frac{1}{2}}(1 - t\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ circ:}\beta = (2\cos\beta -$$

$$(1 - t\beta^2)^{\frac{1}{2}}\cos\beta)^{\frac{1}{2}}\cos\beta^{-1}(1 - t\beta^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ circ:}\beta$$

$$\cos\beta^{-\frac{1}{2}}(2 - (1 - t\beta^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}(1 - t\beta)^{-\frac{1}{2}} \text{ circ:}\beta$$

$$\text{hyp:arc:}\beta = \text{circ.}\beta \times (1 + t\beta^2)^{\frac{1}{4}}(1 - t\beta^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$(2 - (1 - t\beta^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (1 + t\beta^2)^{\frac{1}{4}}(1 - t\beta^2)^{-\frac{1}{4}}$$

$$(2(1 - t\beta^2)^{-\frac{1}{2}} - 1)^{\frac{1}{2}} \text{ circ.}\beta$$

$$\text{hyp:arc:}\beta = \text{circ:arc:}\beta \times (1 + t\beta^2)^{\frac{1}{4}}(1 - t\beta^2)^{-\frac{1}{4}}.$$

$$[1 + t\beta^2 + \tfrac{3}{4}t\beta^4 + \frac{3\cdot 5}{4.6}t\beta^6 + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{4.6.8}t\beta^8 +$$

u. s. w.$]^{\frac{1}{2}}$

Da in 8°. $\text{hyp:arc:}\beta = \dfrac{(u(a^2 + c^2)a^{-3} - 1)^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}}{(1 - (a^2 - c^2)va^{-3})^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}}$.

ell:arc:β gefunden ward, so läßt sich auch

$$\text{ell:arc:}\beta = \frac{(1 - (a^2 - c^2)va^{-3})^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}}{(u(a^2 + c^2)a^{-3} - 1)^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}} \text{hyp:arc:}\beta$$

blos in einer Funktion der HüperbelAbszissen ausdrücken. —

$$\text{ell:arc:}\beta = \frac{((2u^2a^{-2} - 1) - u(a^2 - c^2)a^{-3})^{\frac{1}{2}}}{(u(a^2 + c^2)a^{-3} - 1)^{\frac{1}{2}}(2u^2a^{-2} - 1)^{\frac{1}{2}}} \times$$

hyp:arc:β

30. (36) Wenn in (8°) sect:hyp:β = (sect:ell:β) ×

$$\left(\frac{\text{norm:med:hyp:}\beta}{\text{norm:med:ell:}\beta}\right)^2$$ gefunden ward und

$$(\text{norm:med:hyp:}\beta)^2 = (ac)(u(a^2 + c^2)a^{-3} - 1).$$

$$(u^2(a^2 + c^2)a^{-4} - 1)^{\frac{1}{2}}$$

(norm:

$(\text{norm}:\text{med}:\text{ell}:\beta)^2 = (ac)(1 - v(a^2 - c^2)a^{-3})$.
$(1 - v^2(a^2 - c^2)a^{-4})^{\frac{1}{2}}$ und $(1 - v^2(a^2 - c^2)a^{-4})^{\frac{1}{2}}$
$= [1 - u^2(a^2 - c^2)a^{-4}(2u^2a^{-2} - 1)^{-1}]^{\frac{1}{2}} =$
$(2u^2a^{-2} - 1 - u^2a^{-2} + u^2c^2a^{-4})^{\frac{1}{2}}(2ua^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$
$= (u^2(a^2 + c^2)a^{-4} - 1)^{\frac{1}{2}}(2u^2a^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ so ist
$(\text{norm}:\text{med}:\text{ell}:\beta)^2 = ac(1 - v(a^2 - c^2)a^{-3})$.
$(u^2(a^2 + c^2)a^{-4} - 1)^{\frac{1}{2}}(2u^2a^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ Mithin

$$\frac{(\text{norm}:\text{med}:\text{hyp}:\beta)^2}{(\text{norm}:\text{med}:\text{ell}:\beta)^2} = \frac{(u(a^2 + c^2)a^{-3} - 1)}{(1 - v(a^2 - c^2)a^{-3})}.$$

$$(2u^2a^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(u(a^2 + c^2)a^{-3} - 1)\ u}{(1 - v(a^2 - c^2)a^{-3})\ v}$$ Also

$$1^{\circ})\ \text{sector hyp}:\beta = \frac{(u(a^2 + c^2)a^{-3} - 1)\ u}{(1 - v(a^2 - c^2)a^{-3})\ v}.$$

sector ell:β

2°) Der gleichseitigen Hüperbel Ausschnitt AOM, wo $a = 1$ und die Ellipse zum Zirkel wird, ist dann

sector hyp:$\beta = (2ua^{-1} - 1)uv^{-1}$ sector circ. β
und da $(2u^2a^{-2} - 1) = u^2v^{-2}$ so ist sector hyp. β
$=$ (sector circ. β)$(2u^2a^{-2} - 1)^{\frac{1}{2}}(2ua^{-1} - 1)$
$=$ (sect. circ. β)$(2'(2 - v^{-2}a^2)^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}$.
$(2(2 - v^{-2}a^2)^{-\frac{1}{2}} - 1)$ es ist aber der letzte Faktor
$= v^{-1}a(2 - v^{-2}a^2)^{-1}(2 - (2 - v^{-2}a^2)^{\frac{1}{2}})$.
$(2v^2a^{-2} - 1)^{-1}(2va^{-1} - (2v^2a^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}})$
$= (1 + t\beta^2)^{\frac{1}{2}}(1 - t\beta^2)^{-\frac{1}{2}}(2(1 - t\beta^2)^{-\frac{1}{2}} - 1)$
wo $va^{-1} = \cos\beta$ und $2v^2a^{-2} - 1 = \cos 2\beta$
$= \frac{1 - t\beta^2}{1 + t\beta^2}$; sector hyp:$\beta$ = (sector circ:β).

(1

$$(1 + t\beta^2)^{\frac{1}{2}}(1 - t\beta^2)^{-\frac{1}{2}}(1 + t\beta^2 + \tfrac{3}{4}t\beta^4 + \frac{3.5}{4.6}t\beta^6 + \frac{3.5.7}{4.6.8}t\beta^8 \text{ u. s. w.})$$

3°) Bei der Hüperbel ist im ΔMPO die Basis = subnorm. $\beta = uc^2a^{-2}$ die senkrechte Höhe = PM = y also der Flächen-Raum vom ΔMPO = $\frac{1}{2}yuc^2a^{-2}$ oder □ (ΔMPRO) yuc^2a^{-2}. Dieser wäre vom doppelten Flächen-Raum des Hüperbel-Sektors AOM abzuziehen, um den Flächen-Raum des Hüperbel-Abschnittes MARPM zu finden.

Dies hier mag einstweilen genug seün, von den Rektifikationen und Quadraturen der Kurven erster höherer Ordnung. Sobald im Süsteme selbst die Ordnung für sie und andere eintritt, dann vielleicht ein Mereres.

Es ist dies genug oder mer als genügend, die Methode von warer Flukſions-Rechnung an diesen Kurven gezeigt zu haben, welche bei näherer Entfaltung sich Allen einst als absolut ächte und gerade zum Ziele fürende bewären, und dafür anerkannt werden wird.

Rektifikation und Quadratur der Radlinie.

Die Rektifikation und Quadratur keiner Kurve kann wol jenen des Zirkels in Hinsicht der Nettigkeit und Einfachheit näher liegen als wie die der Radlinie oder Zükloide. Fig. 5. In dieser bestimmt und bedingt der Bogen und seine zugeordneten Linien des sich auf der geraden Linie abwälzenden Kreißes, ganz den Zükloiden-Bogen. In der Radlinie giebt es keine festen Foken, der Punkt, wo der Kreis senkrecht auf der geraden Linie aufsteht, und der beschreibende Punkt A begränzen die Normale AX des Zükloiden-Bogens 'A A, welche also der Sene oder Chorde AX des abgewälzten Bogens gleich ist; der auf der geraden Linie abgewälzte Bogen giebt die Quernormale 'AX ab; ein Perpendikel vom beschreibenden Punkt auf dieser die senkrechte Ordinate AE, welche mithin dem Querſinus BX des abgewälzten Bogens gleich ist: die Linie, welche diese Ordinate und die Normale

male auf der Quernormale abschneiden, ist die Subnormale EX, welche dem Sinus AB des abgewälzten Bogens gleich ist. Der abgewälzte Bogen $= \alpha$, sein quers: α, sin α und chord: α, diese vier Linien sind die Notwendigen, die ganz die Rektifikation und Quadratur eines ZükloidenBogens bestimmen. Dieser ist einem ZirkelBogen gleich, von der WinkelOefnung, welche der abgewälzte Bogen und seine Chorde bilden, und deren Tangente auf die Einheit reduzirt der Quotient, aus Sinus des Bogens in den Quersinus dividirt ist, beschrieben mit dem geometrischen Mittel aus diesen beiden dem Bogen und seine Sene, als Radius.

$$\text{oder } \mathfrak{T}.\ \text{arc}:\text{cycl}.\beta = \frac{\text{quers}\,\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha^2}{2\sin\frac{1}{2}\alpha(1-\sin\frac{1}{2}\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \sin\tfrac{1}{2}\alpha(1-\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\alpha$$

norm: $\beta = 2\sin\frac{1}{2}\alpha$ und quernorm: $\beta = \alpha$ also

norm: med: $\beta = (2\sin\frac{1}{2}\alpha)^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}$ und

$$\text{arc}:\text{cycl}:\beta = \alpha^{\frac{1}{2}}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{3}\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\alpha^3 + \tfrac{1}{5}\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\alpha^5 - \tfrac{1}{7}\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\alpha^7 + \tfrac{1}{9}\mathfrak{T}\tfrac{1}{2}\alpha^9 - +\ \text{u. s. w.})$$

$$\text{arc}:\text{cycl}:\beta = r^{-1}(2\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}\tfrac{1}{2}\alpha = r^{-1}\alpha^{\frac{3}{2}}.$$

$$(\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}\alpha)^{\frac{1}{2}} = r^{-1}\alpha^{\frac{3}{2}}(\tfrac{1}{4}\alpha - \frac{\alpha^3}{2\cdot3\,2^4} + \frac{\alpha^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\,2^6} - \frac{\alpha^7}{2\cdot3\cdot7\,2^8} + \frac{\alpha^9}{2\cdot3\cdot9\,2^{10}}\ \text{u. s. w.})^{\frac{1}{2}}$$

Also der FlächenRaum zwischen dem Bogen der RadLinie und seinen beiden auf ihn senkrecht stehenden Normalen, d. h.

$$\square\ \text{sect}:\text{arc}:\text{cycl}:\beta = \frac{r^{-2}\alpha^2}{2}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{2\cdot3\cdot2^3} + \frac{\alpha^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot2^5} - \frac{\alpha^7}{2\cdot7\cdot2^7} + \text{u. s. w.}\right)$$

Ist

Ist $\alpha = \pi =$ dem Halbkreiße, wo $r = 1$, so ist der Theil der Gleichung, welcher in Klammern eingeschlossen ist, gleich dem Radius also

$$\square \text{ sectc. arc : cycl : } \beta = \frac{r\alpha}{2}(2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha)\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2} r^2 \pi^2$$

Also der ganze FlächenRaum, welchen die Zükloide mit der abgewälzten KreisLinie einschließt, $= r^2 \pi^2$

Die Geometer der Alten, z. B. Archimedes und unsere viel und kurz gefaßten analütischen Geometer, fanden eine endliche Quadratur der Parabel, die, wie die jeder andern Kurve, nach uns absurd und unmöglich ist; Weil Parabel- und desgleichen Ellipsen- und HüperbelBogen und die rücksichtlichen Aus- und Abschnitte nach unserer rein algebraisch-geometrischen Ansicht in algebraischen Verhältnissen mit ZirkelBögen, Aus- und Abschnitten stehen. — Keine Kurve kann ihrer Beschaffenheit nach eine endliche Quadratur, wol aber muß sie eine endliche algebraische Zirkulafikation haben; weil innere und äußere ZirkelBögen die Gränzen derselben sind. —

Zer-

Zernichtung

aller sogenannten

abgekürzten RechnungsMethoden,

auf

willkürliche Abkürzungen und Ergänzungen sich gründend,

mithin besonders

der

Differenzial- und IntegralRechnungsMethode

und

jeder ihr änlichen

FunktionenRechnungsMethode.

Dritte Abtheilung des Ganzen.

"Welche von denselben (Methoden, und von den neuesten Anweißungen „zur Geometrie) beweißt wol das bekannte Verhältniß des Durchmessers zum „Umkreiße des Zirkels? — Und dennoch berufen sie sich one Unterlaß auf „dasselbe, und gründen ihre Regeln zur Berechnung des Zirkels und der run„den Körper one Bedenken darauf."

Prof. Büsch.

Zernichtung

der

Differenzial- und IntegralRechnungsMethode

und

jeder ihrer änlichen

FunktionenRechnungsMethode

durch

Beispiele an den Rektifikationen der Kurven und durch Angreifung und Prüfung ihrer Prämissen.

---

1. Wie unfolgerecht die Vorleibnitzianer bei der Lösung dieser Probleme, wie sie den Kreis als ein Vieleck von ser vielen Seiten ansahen, oder das Mittel zwischen den Perimetern eines Vielecks von vielen Seiten inner und außer dem Kreiße als Peripherie des Zirkels annamen, wie schwierig und mühselig durch beständiges Wurzelausziehen sie diese Perimeter suchten (und zwar auch ein richtiges Verhältnis fanden) und wie langweilig ihre Berechnung der Sinusse, Senen und Tangenten war, wie unmathematisch und unwissenschaftlich ihr ganzes Benemen dabei überhaupt, brauche ich wol hier nicht zu entwickeln. Es ist dies alles bekannt und im Kästner und andern kann man sich hierüber unterrichten. Sie haben zum wenigsten doch die Analogie für sich. Nur z. B. wie sie aus dem 96Eck (Sechs- und NeunzigEck) und dessen Perimeter (inner und außer dem Kreiße beschrieben) die Peripherie des Zirkels suchten, und fanden.

Seite des innern 96Ecks

$$= [2 - (2 + [2 + (2 + 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$$

Seite des äußern 96Ecks

$$= \frac{2[2 - (2 + [2 + (2 + 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}}{[2 + (2 + [2 + (2 + 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}}$$

Mithin Peripherie des Zirkels

$$96 \times \frac{(2 - [2 + (2 + [2 + 3^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{2 + [2 + (2 + [2 + 3^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} \cdot$$
$$(1 + \tfrac{1}{2}(2 + [2 + (2 + [2 + 3^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})$$

2°) Wo man nach der von mir abgeleiteten Formel, die Seite des mEcks inner dem Kreiße aus dem Sinustotus zu finden, alles ser leicht one das merfältige Wurzelausziehen würde haben berechnen können

$$4 \cdot \left[1 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{96^2 - 2^2}{96^2} + \frac{(96^2 - 2^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \right.$$
$$\frac{(96^2 \cdot 3^2 - 2^2)}{96^4} + \frac{(96^2 - 2^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{(3^2 96^2 - 2^2)}{96^4} \cdot$$
$$\left. \frac{(96^2 \cdot 5^2 - 2^2)}{96^2} \text{ u. s. w.} \right] = 4 \cdot \left[1 + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \right.$$
$$\left(1 - \frac{1}{48^2}\right) + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\left(1 - \frac{1}{48^2}\right) \cdot$$
$$\left(3^2 - \frac{1}{48^2}\right) + \frac{1}{2 \ldots 7}\left(1 - \frac{1}{48^2}\right)\left(3^2 - \frac{1}{48^2}\right) \cdot$$
$$\left. \left(5^2 - \frac{1}{48^2}\right) \text{ u. s. w.} \right]$$

3°) Doch noch ein Anderer suchte und fand höchst mühsam den Perimeter des in den Zirkel beschriebenen

393210Ecks = 6,28318530703196l6

und den Perimeter des um den Kreis beschriebenen

393210Ecks

393210Ecks = 6.283185307 26678912

Summe = 12,566370614 29985 28

Peripherie des Zirkels = 6,283185307 1499764

2. Ich gehe zur Prüfung der entgegengesetzten Theorie, zur Theorie der Nachdenker und Nachrechner großer Männer, zur Prüfung der Theorie der Verhältnisse der trigonometrischen Linien, nach der Differenzial- und Integral-Rechnung entwickelt, über.

Wenn folgende Angriffe dieser Theorie und somit der so bewunderten nichtigen Rechnung den letzten Stoß in den Köpfen der Vererer derselben nicht zu geben vermögen, so geschieht es für diese und die Nachwelt durch keine weitere Erläuterung und FeuerProbe und nur der Geist der Warheit, den nagenden Zan mit der Zeit gemein habend, wird es zu thun vermögen.

Die Rektifikation des ZirkelBogens nach und mittelst der DifferenzialRechnungsMethode soll uns als Beispiel, als Einleitung dienen, ihre Principien zu prüfen. —

Wenn und wiefern der ZirkelBogen α wächst, um $\delta\alpha$ (als einem mer oder weniger ser großen oder ser kleinen Theil von α, gilt dem Mathematiker ganz gleich, sollte es wenigstens —), so und sofern kann auch dessen Sinus x um dx wachsen und abnemen, — um δx als einem bestimmten mer oder weniger höchst kleinen oder großen Theil auf x bezogen, gilt ebenfalls hier ganz gleich, und umgekert.

Jetzt setzt nun unsere grose oder kleine Differenzial- und IntegralRechnen.Kunst — daß das Quadrat des Unterschiedes des Bogens α oder $(\delta\alpha)^2$ gleich seŭ der Summe aus dem Quadrate des Unterschiedes vom Sinus von α oder aus $(\delta x)^2$ und dem Quadrate des Unterschiedes (oder Wachsthums) vom Quersinus vom Bogen α, oder von y d. h. $(\delta y)^2$; oder sie setzten absolut $(\delta\alpha)^2 = (\delta \text{quers}\,\alpha)^2 + (\delta \sin\alpha)^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2$. [Ließ sich denn nicht eben so füglich $(\delta\alpha)^3$ setzen $= (\delta x)^3 + (\delta y)^3$ oder $(\delta\alpha)^n = (\delta x)^n + (\delta y)^n$ wenn hier Willkür obwalten darf, warum nicht auch? —] Mit einem Worte, man kann es zur Stunde noch nicht begreifen, wie einige sonst so folgerecht seŭn wollende Mathematiker, so höchst unfolgerecht, so Schärfe los verfaren und annemen oder wie sie setzen konnten, daß der Unterschied des Bogens (der Kurve) α

die Hüpothenusse und der Unterschied des Sinus (der Ordinate) x und derjenige des Quersinus (der Abszisse) y, die beiden Katheden eines rechtwinklichen geradlinigten Dreiecks; folglich mit oder one Verlängerung oder Verschwindung der Sinusse, Quersinusse und des Bogens, daß Sinusse und Quersinusse Katheden, und daß Bogen Hüpothenussen eines geradlinigten rechtwinklichen Dreiecks wären und auch in änlichen Verhältnissen zu einander stünden. Und so umgekert, Katheden wären Sinus und Quersinus, und Hüpothenussen Bogen eines Zirkels! — — oder $\alpha^2 = \sin\alpha^2 + \text{querlin}\,\alpha^2 = 2\,\text{quersin}\,\alpha$

Dies der erste Feler, den man beging. Welche usurpirte Anwendung des Püthagoräischen LerSatzes! —

Bogen ist und bleibt ja Bogen, d. i. krumme Linie, auch wenn er noch so klein in Beziehung auf den Viertels-Kreis wäre, und diejenigen, die sich nur ein Mal einfallen lassen, sie zuweilen als gerade Linien und folglich auch umgekert die geraden als krumme anzusehen, sollten mit dem ErenNamen Math. gar nicht belegt werden.

Wie die beiden beiderseitigen Unterschiede δx und $\delta\alpha$ oder δy und $\delta\alpha$ sich einander wechselseitig bedingen, dies, diese Relation eben soll erst ausgemittelt und kann, und soll als bekannt nicht vorausgesetzt werden. Welche Ausmittlung aber auf die Ausmittlung der erst noch aufzusuchenden allgemein geltenden WechselBedingungen und WechselVerhältnisse von Bogen und Sinus oder Quersinus zu einander beruhet und beruhen kann; unmöglich aber umgekert, da ja δx oder die Zu- oder Abname des Sinus x, keineswegs als der Sinus vom Bogen $\delta\alpha$, und δy oder die Zu- oder Abname des Quersinus y keineswegs als Quersinus vom Bogen $\delta\alpha$ angesehen und betrachtet werden kann und umgekert $\delta\alpha$ nicht als Bogen von einem δx als Sinus und einem δy als Quersinus; weil dann ferner der Sinus vom Bogen $(\alpha + \delta\alpha)$ nicht gleich dem Sinus von α plus dem Sinus von $\delta\alpha$, sondern $\sin(\alpha + \delta\alpha) = \sin\alpha\cos\delta\alpha + \cos\alpha\sin\delta\alpha$ wäre und wie sichs erst nach vollendeter wissenschaftlicher Analüse ergeben und zeigen wird, und wie oben konnte und durfte $\delta\alpha =$ Funktion von $\sin(\alpha + \delta\alpha) —$ Funktion von $\sin\alpha$ oder $\delta\alpha = \sin(\alpha + \delta\alpha) + \frac{1.1}{2.3}$.

sin

$$\sin(\alpha+\delta\alpha)^3 + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\sin(\alpha+\delta\alpha)^5 \text{ u. s. w.} -$$
$$[\sin\alpha + \frac{1.1}{2.3}\sin\alpha^3 + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\sin\alpha^5 \text{ u. s. w}]$$

3. Doch wie verfuren denn jene Amath., nachdem sie $\delta\alpha^2 = \delta x^2 + \delta y^2$ gesetzt hatten, weiter? —

Jetzt setzten sie, da $\sin\alpha^2 = 2\,\text{quers}\,\alpha - \text{quers}\,\alpha^2$, so seŭ die Gleichung $\delta(\sin\alpha^2) = \delta(2\,\text{quers}\,\alpha - \text{quers}\,\alpha^2)$ oder $\delta(x^2) = \delta.(2y - y^2)$ gleich der Gleichung $2x\delta x = 2\delta y - 2y\delta y$, also $\delta y = \frac{x}{1-y}\delta x$ oder $\delta y^2 = \frac{x^2}{(1-y)^2}\delta x^2$ und da $2y - y^2 = x^2$, so seŭ $\delta y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}\delta x^2$, diesen Wert von δy^2 in die obige Gleichung $\delta\alpha^2 = \delta x^2 + \delta y^2$ gesetzt, giebt die folgende $\delta x^2 = \delta x^2 + \frac{x^2}{1-x^2}\delta x^2 = \frac{\delta x^2 - x^2\delta x^2 + x^2\delta x^2}{1-x^2}$
$= \delta x^2(1-x^2)^{-1}$ mithin $\delta\alpha = \delta x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Es ist ja aber $\delta(x^2) = \delta(2y - y^2)$ gleich $x^2 + 2x\delta x + \delta x^2 = 2y + 2\delta y - y^2 - 2y\delta y - \delta y^2$ und $x^2 = 2y - y^2$ hiervon abgezogen bleibt $2x\delta x + \delta x^2 = (2-2y)\delta y - \delta y^2$ Mithin von $(1-y)^2 = 1 - 2y + y^2 = 1 - x^2$; die vorige Gleichung abgezogen, giebt $1 - x^2 - 2x\delta x - \delta x^2 = (1-y)^2 - 2(1-y)\delta y + \delta x^2$, $[1 - (x+\delta x)^2]^{\frac{1}{2}} = 1 - y - \delta y$ oder $\delta y = 1 - y - [1-(x+\delta x)^2]^{\frac{1}{2}}$
$\delta y^2 = 1 - x^2 + 1 - x^2 - 2x\delta x - \delta x^2 - 2[(1-x^2)(1-x^2-2x\delta x-\delta x^2)]^{\frac{1}{2}}$ also $\delta\alpha^2 = \delta x^2 + \delta y^2 = 2 - 2x^2 - 2x\delta x - 2[(1-x^2).(1-x^2-2x\delta x-\delta x^2)]^{\frac{1}{2}}$
$\delta\alpha = 2^{\frac{1}{2}}[x\delta x + 1 - x^2 - [(1-x^2)(1-x^2 - 2x\delta x - \delta x^2)]^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$ wenn nur die Gleichung $\delta\alpha^2 = \delta x^2 + \delta y^2$ würklich war und gültig wäre.

Und

Und daß sie nun $\delta\alpha = \delta x(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ setzten: dies eben, daß für δy^2 ein falscher Wert substituirt wurde, war der zweite große Feler, der begangen worden ist.

Anmerkung. Unbegreiflich ist es, (daß man es hier antizipire) wie man in der Mathematik ihrer sonst so räumlichen Strenge und und Folgerechtheit zum Hon und Spott annemen konnte, daß $\delta(x^n)$ seü blos $n x^{n-1} \delta x$ und alle folgenden Glieder weglies, oder $\frac{\delta(x^n)}{\delta x} = n x^{n-1}$ als Gränze der Veränderungen setzte, wiefern und wenn man $x + \delta x$ dem x substituirte. Für einen waren Mathematiker bleibt, wie sich weiter unten ergiebt, ewig $\delta(x^n)$

$$= (x + \delta x)^n - x^n = n x^{n-1} dx + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} \delta x^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3} \delta x^3 \ldots + n x \delta x^{n-1} + \delta x^n .$$

Man mag δx noch so klein in Beziehung auf x annemen, so ist und bleibt δx wie jede Potenz n davon beständig und ewig Etwas: — es kann und darf weder die rte noch nte Potenz von δx als solche nie gleich o oder Nichts gesetzt und geachtet werden (in der allgemeinen Rechnenkere), one daß dann in demselben Fall selbst $n x^{n-1} \delta x = o$ sogleich mit gesetzt wird. — Ist aber δx gleich Anfangs $= o$ gesetzt, wie in aller Welt kann man es dann vernünftiger Weise noch mit in Rechnung bringen. Ist aber δx Etwas, wie kann man dann δx^2, $\delta x^3 \ldots \delta x^n$ mathematisch gering achten, man mag auch zur Beschönigung und Vertheidigung z. B. die Begriffe von Differenzen, von Gränzen der kleinsten Fluksionen u. s. w. vorbringen, was man gern will. (Siehe * Anm. S. 142. (QE))

Und das Verfaren jener Amath., als sie nun $\delta\alpha = \delta x(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach zwei begangenen Felern gesetzt hatten, war dann weiter? — Sie entwickelten $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach der BinomialFormel in eine unendliche Reihe und erhielten $\delta\alpha = \delta x + \frac{1}{2} x^2 \delta x + \frac{1.3}{2.4} x^4 \delta x + \frac{1.3.5}{2.4.6} x^6 \delta x + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} x^8 \delta x$ u. s. w. ins ∞. Jetzt setzten sie nun,

wenn

wenn $\delta\alpha$ zu α wieder werde, so seŭ $\delta x = x$, $\frac{1}{2}x^2\delta x = \frac{1.1}{2.3}x^3$ $\left(\text{also } \delta x = \frac{x}{3}\right)$; $\frac{1.3}{2.3}x^4\delta x = \frac{1.1.3}{2.4.5}x^5$ $\left(\text{also } \delta x = \frac{x}{5}\right)$; $\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6\delta x = \frac{1.1.3.5}{2.4.6.7}x^7$ $\left(\text{also } \delta x = \frac{x}{7}\right)$; $\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8\delta x = \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^9$ $\left(\text{also } \delta x = \frac{x}{9}\right)$ u. s. w. Und sie erhielten durch blindes Ungefär den richtigen Ausdruck für α nämlich $\alpha = x + \frac{1.1}{2.3}x^3 + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}x^5 + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}x^7$ u. s. w. ins ∞.

Wenn man nach Vorschrift die Gleichung $r^2 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$ oder $r^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ differenziirt, so erhält man $-2\sin\alpha\,\delta\sin\alpha = 2\cos\alpha\,\delta\cos\alpha$; $\pm\frac{\delta\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mp\frac{\delta\cos\alpha}{\sin\alpha}$ und $\delta\alpha$ gleich $\frac{\delta\sin\alpha}{\cos\alpha}$ gesetzt wurde, und $\pm\frac{\delta\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mp\frac{\delta\cos\alpha}{\sin\alpha}$, so ist auch $\delta\alpha = \frac{-\delta\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\delta\cos\alpha}{(1-\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}$. Integrirt man nach Vorschrift wie oben, so würde $\alpha = -\cos\alpha - \frac{1.1}{2.3}\cos\alpha^3 - \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\cos^5\alpha - \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\cos^7\alpha$ u. s. w., was offenbarer Widerspruch ist, daß der Bogen nach einer gleichen nur negativen Formel durch seinen Sinus oder Kosinus gegeben seŭn soll. Doch der Widerspruch zeigt seine Quelle, wenn man beide Werte von α von einander abziehet oder zu sich addirt. Er ergiebt sich hieraus, daß man $\pm\sin\alpha$ gleich $\mp\cos\alpha$ durch das elegante Differenziiren und Integriren gesetzt habe.

Oder

Oder man beliebte auch zu finden und zu setzen, daß das Differenzial vom Bogen gleich seü dem Differenzial von der Tangente dividirt durch 1 und der 2ten Potenz der Tangente, oder daß $\delta\alpha = \frac{\delta t}{1 + t^2} = \delta t - t^2\delta t + t^4\delta t - t^6\delta t + t^8\delta t + -$ u. s. w., wenn t die Tangente von α und δt das Differenzial derselben bedeutet.

Jetzt integrirte man oder beliebte zu setzen, wann $\delta\alpha$ zu α wieder werde, so seü $\delta t = t$; $-t^2\delta t = -\frac{t^3}{3}$; also $\left(\delta t = \frac{t}{3}\right)$; $+t^4\delta t = +\frac{t^5}{5}$ $\left(\text{also } \delta t = \frac{t}{5}\right)$; $-t^6\delta t = -\frac{t^7}{7}$, $\left(\text{also } \delta t = \frac{t}{7}\right)$; $+ t^8\delta t =$ $+\frac{t^9}{9}$ $\left(\text{also } \delta t = \frac{t}{9}\right)$ u. s. w. Und auch hier wollte es der Zufall, daß man erhielt $\alpha = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - +$ u. s. w.

So ist ebenfalls $\frac{\delta t}{1 + t^2} = \frac{-\delta \cot\alpha}{1 + \cot\alpha^2}$ also nach der Integration $\alpha = -\cot\alpha + \frac{\cot\alpha^3}{3} - \frac{\cot\alpha^5}{5} + \frac{\cot\alpha^7}{7}$ ins ∞. Der Widerspruch erreicht seine Höhe, wenn beide Werte von α von einander abgezogen, $t\alpha = -\cot\alpha$ erscheint. —

Dies war mer als der dritte Feler, es waren hier unendlich viele Feler, die man bei diesem sogenannten Integriren beging.

Das blinde Ungefär

allein wollte es, daß diese 3 Feler sich kompensiren sollten und dennoch die Warheit zu Tage gefördert ward. Man mache hier ja nicht jenen berüchtigten logischen Schluß:

Weil wir das Ware am Ende zum Resultat erhielten, — so — — müssen unser Verfaren, unsere Annamen und SchlußFolgen die waren und richtigen seün; denn —. Dem blinden glücklichen Ungefär, daß die Feler sich gerade kompensirten oder aufhoben, ist er, der glückliche Fund der Warheit, zu danken; sie konnten sich im Gegentheil vergrößern und eben so gut verstärken als sie sich aufhoben. — Und das Gefundene mußte dann auch war seün?! —

Wie sie dann durch das gleiche glückliche blinde Ungefär von Kompensation und wechselseitigem Aufheben von Felern, die rechten Formeln aus dem Quersinus, der Tangente, u. s. w. den Bogen und jene aus diesem zu finden, erhielten; dies hier ausfürlich zu zeigen, wird man mir wol gerne erlassen, da man an dieser Probe genug hat.

Wie läßt sich nach N°. 28. Erl. Lit. Zeit. 1802. "bedenken, daß in den Zwischenraum beider Akte erstens des „Rektifizirens und des Differenziirens und Integrirens „ganz neue Verhältnisse zum Vorschein kommen können, „welche auch nach Aufhebung beider annoch übrig bleiben?!" Denn nichts versichert ja ihre Warheit und Richtigkeit. Ein unbekanntes Verhältnis kann nur gefunden werden, wenn es nach den sechs bekannten simplen arithmetisch-analütischen Regeln genetisch oder analütisch konstruirt und auf eben den natürlichen Wege entwickelt wird. Es darf nirgends kein Verhältnis zum Vorschein kommen, welches nicht gleich schon vom Anfang an in und mit der Rechnung offen und nicht verborgen da lag oder da war. — — Wo findet dies bei dem RechnungsGange der DifferenzialRechnung Statt? — —

In irgend einer Funktion — z. B. die für die Ordinate y der Ellipse aus der Abszisse x ist $y^2 = r^2(2ax - x^2)a^{-2}$ — von x durch y (und beständigen Größen) oder von y durch x gegeben, x und y mögen hier Koordinaten seün, wo x um die Differenz Δx wächßt, — ist und bleibt es nach meinen Einsichten doch falsch und unmathematisch, daß man nach vorgenommenen Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen und dergl. in dem Ausdruck $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ oder $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ blos auf den Theil achtet, worin nach allen angewandten arithmetischen KunstGriffen blos x und y

und

und kein Δx und Δy vorkommen, — dies eben noch dazu als etwas Karakteristisches ansiehet und für $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ dann $\frac{dx}{dy}$, oder für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dann $\frac{dy}{dx}$ auf der einen Seite setzt und dx und dy nun für Differenziale von x und y achtet, die blos durch x und y — jedoch nicht der Quantität nach, sondern blos der Form nach — bestimmt wären und würden oder in einer Relation stünden. [— Wenn wir recht vernommen haben, so ist mathematische Analüsis eine Wissenschaft, die es blos mit der Quantität der Quantitäten und der Qualitäten und nicht mit der Qualität beider zu thun hat?! —] Und aus einer solchen blos die Relation der Form angehenden Gleichung ließe sich wiederum auf die GrundGleichung, welche die Quantität ausdrücke, zurückschließen. —

Dies ist nun die mündlich gegebene Hüpothese und Erklärung der Methode von der Differenzial- und IntegralRechnung des Prof. Kl — l.

Man sollte denken, daß aus bloß die Quantität angehenden Gleichungen auf anderweitige auch die Quantität angehende Gleichungen, auf etwas Gleichartiges weiter geschlossen, diese aus jenen nur abgeleitet werden könnten, und nicht Gleichungen, die blos der Relation, der Form angehen, aus quantitativen Gleichungen, d. h. etwas heterogenes herbeigeschlossen, herbeideduzirt werden könnte. — Gleichartiges erzeugt nur Gleichartiges; Form nur Form, Gehalt nur Gehalt. —

Doch ich frage jetzt:

Hat denn dieserwegen nicht der verachtete Theil, auf der einen Seite jeglicher Gleichung, worin Δx und Δy auch vorkommen, und weil die nähere und schärfere Bestimmung von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ eben um so mer von Δy und Δx abhangen sollte und augenscheinlich abhängt, da Gleichartiges nur aus Gleichartigem sich füglich bestimmen und entwickeln läßt und weil ferner dieses um so karakteristischer in jenem Ausdrucke seü und seün müßte, — einen um so größern Anspruch auf seine Beachtung? — — Wie würde man umgekert über Rechnungs-

Sün-

Sünden schreien, wenn man gerade das Gleiche erwiederte und auf den ganz verachteten und vernachlässigten Theil in jenem Ausdrucke aus einer andern Grille allein achtete, und den zeither blos beachteten Theil gänzlich verachtete und hinschwinden lies, eben weil x und y allein darin vorkämen, die höhern Potenzen als verschunden betrachtet werden sollen — und den Ausdruck $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ in den $\frac{dx}{dy}$, d. h. das Differenzielle von x dividirt durch das Differenzielle von y sich verwandeln lies? — ja wol gar x und y aus diesem Theil gänzlich zu elimiren und ihn blos durch Δx und Δy auszudrücken suchte, welches noch weit konsequenter wol wäre? — Hier zu sagen Δx und Δy würden in Beziehung auf x und y so klein, daß sie als verschwindend oder beinahe (?!) o zu achten wären, kann gar nicht angehört werden; denn Δy und Δx könnten auch, auf x und y bezogen, so groß seün, daß x und y gegen sie verschwinden oder beinahe o würden, ob der einmal festgesetzten Veränderlichkeit derselben.

Verschwindet irgend eine Potenz von dx, wird sie = o, so ist auch jede Wurzel aus dieser zu o gewordenen Potenz von dx = o, denn aus Nichts wird nimmermer Etwas, wie man es auch anfange. Doch nein! hier folge folgende mir bei der zweiten Ueberarbeitung d. Mskpts in die Hände fallende Rezension in d. Allg. Lit. Zeit. mit von mir eingezogenen Bemerkungen, oder es folge

die

große mathematische Schöpfung von Etwas aus Nichts oder von Nichts aus Etwas.

Kopenhagen bei Brummer: Phüsische, chemische, naturhistorische und mathematische Abhandlungen aus der neuen Sammlung der Schriften der königl. dänischen Gesellschaft der Wissenschaften, übersetzt von D. P. Scheel und C. F. Degen. Ersten Bandes erste Abtheil. 1798. 170 S. Ersten Bandes zweite Abtheil. 1800. 102 S. 8.

1. Neue analütische Methode, die Differenzialien der veränderlichen Größen zu finden. Ein Versuch von E. Morville. Der Verf. stellt hier eine Methode auf, die Differenzialien der veränderlichen Größen zu finden, one irgend etwas im Kalkül wegzuwerfen, wie solches geschehen muß, man mag entweder mit Newton seine Zuflucht zu einer allgemeinen Reihe nemen, und darin solche Glieder weglassen, die in Vergleichung mit den vor ihnen hergehenden als verschwindend betrachtet werden können; oder man mag mit Euler'n, um das Differenziale von x^2 zu bestimmen, erst die endliche Differenz von x^2 nämlich $2xw + w^2$ betrachten, wobei w den Zuwachs bedeutet, welchen x für einen Augenblick erhält, und darauf w^2 als eine in Vergleichung mit $2xw$ verschwindende und wegzuwerfende Größe ansehen, um dadurch das Differenzial von $x^2 = 2xdx$ zu erhalten *). Der Haupt-Begriff, von dem er ausgehet, gründet sich auf die bekannte Definition eines Differenzials, wonach es als eine im Verschwinden begriffene Größe vorgestellt werden kann. Eine solche Größe würde sich durch den analütischen Ausdruck $x - x$ bezeichnen lassen. Diesem nach wäre $x - x = dx$ ($= 0$? doch). Eben so würde $x^2 - x^2 = dx^2$ u. s. w. und allgemein $x^n - x^n = dx^n$ seün. Um die Gleichheit dieser Ausdrücke darzuthun, sind hier die Differenzialen von x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^n, $\sqrt{x}$, $\frac{x}{y}$ und xy nach der neuen Methode gesucht worden und es zeigt sich a posteriori, daß alle nach der gewönlichen Binomial-For-

*) Anm. Daß man in der Bestimmung von Größen durch eine andere in bestimmten Zalen die immer höhern Potenzen eines Bruches in einer Reihe hinwegläßt, ist löblich und selbst nötig, man würde ja sonst in der Ausrechnung einer Größe nie enden. Die Vernunft und die Ausübung gebietet dies in der praktischen RechnenKunst. Allein wenn es um die allgemeinsten Entwickelungen und Resultate in höchst allgemeinen Karakteren wie in der Analüsis oder in der analütischen Geometrie zu thun ist; dann sollte man sich der willkürlichen Wegwerfungen und Zuthaten, Ergänzungen doch schämen. Solche sind da absolut verboten, weil es ja um absolute, allgemeine und totale Resultate zu thun ist. —

Formel gefundene Ausdrücke, mit den auf die hier gelerte Weise sich ergebenden Resultaten völlig übereinstimmen. Um den Ausdruck für dx^2 zu finden, löset man die Gleichung $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ auf, worin $x = y$ gesetzt worden ist: so entstehet $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$; das ist $\frac{x^2 - x^2}{x - x} = x + x = 2x$, woraus durch Multiplikation auf beiden Seiten der Gleichung mit $x - x$ endlich der Ausdruck $x^2 - x^2 = 2x(x - x)$ folgt. Substituirt man nach den vorhergehenden: so ist $x^2 - x^2 = 2x\,dx = dx^2$. [Wenn aber $x - x = dx$, so ist ja $(x^2 - x^2) = x(x - x)$ und also $x\,dx = 2x\,dx$ oder $2x = dx$, das ist ja aber Widerspruch. — — — Doch nein! beware der Himmel! —] Eben so kann man $x^3 - y^3$ durch $x - y$ dividiren und es entsteht zunächst der Ausdruck $\frac{x^3 - y^3}{x - y}$ $= x^2 + xy + y^2$, d. i. wenn x für y substituirt wird: $x^2 + xx + x^2 = 3x^2$. Wird nun $y - x$ durch Multiplikation auf die andere Seite der Gleichung gebracht; so erhält man $x^3 - x^3 = 3x^2\,dx$. Setzt man im Allgemeinen $dx^n = x^n - x^n$: so ergiebt sich auf die vorige Weise durch Division des $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ die Reihe $x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots\ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}$, welche den Gesetzen des Kalkuls zufolge, aus n Gliedern bestehet, davon jedes, nachdem x für y substituirt worden ist, den um Eins verminderten Exponenten n hat: folglich muß ihre Summe $= n\,x^{n-1} = \frac{x^n - x^n}{x - x}$; $\left[= \frac{x^n(1 - 1)}{x(1 - 1)} = x^{n-x}\right.$ also $nx^{n-1} = x^{n-1}$ ohe! also $n = 1$ und $x^{n-1} = x^{1-1}$ $\left.= x^0 = 1,\ n = x^0,\ x^n = x^{x^0}\right]$ und $x^n - x^n = nx^{n-1}$. $(x - x)$ das ist $x^n - x^n = n\,x^{n-1}\,dx = dx^n$ seün, gerade so wie die BinomialFormel es fordert.

Auf diese Weise läßt sich auch das Differenzial von einer veränderlichen WurzelGröße $= \sqrt{x}$ bestimmen. — — — [O über das Schaffen von Etwas aus Nichts und von Nichts aus Etwas in einer Mathesis, — Mathesis?!?! — O über das vortreffliche Spielen und die Spielereien mit lauter Nullitäten, Nichtigkeiten; denn $x - x = dx$,

$x^n - x^n = dx^n = x^n(1 - 1) = dx^n$ ist und bleibt ewig o Null und das große mathematische Nichts. Anfänger im Einmaleins lernen zuerst 1mal o, oder 2mal o, oder 3mal o, oder 4mal o u. s. w. oder Millionenmal o ist und bleibt in alle Ewigkeit = o, o über alles und nichts. Denn durch zweimal und dreimal und Millionenmal Null und Nichts erhält nimmermer Etwas. —

O über die eigene Ere in der Analüsis des Unendlichen immer und ewig nur mit lauter Nichtigkeiten zu thun haben zu wollen und seit Jarhunderten zu thun gehabt zu haben! —! —! — mit Gespinnsten in einer Wissenschaft, wo am ersten Realitäten ewig walten sollten, und präsumirt werden! —

"Es ist nämlich $\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ und wenn x für y substituirt wird: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$ $= \frac{x - x}{\sqrt{x} - \sqrt{x}}$. Hieraus folgt zunächst die Gleichung

$x - x = 2\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{x})$; [Ist denn aber $\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{x})$ nicht auch $= \sqrt{x}\sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{x} = x - x$? — also ist $x - x = 2x - 2x = 2x(1 - 1) = o$ [wird auf beiden Seiten mit $2\sqrt{x}$ dividirt, um $(\sqrt{x} - \sqrt{x})$ von seinem Koefizienten zu befreien: so entstehet der Ausdruck $\frac{x - x}{2\sqrt{x}}$ $= \sqrt{x} - \sqrt{x}$ das ist auf gewönliche Weise geschrieben $d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$; Bei Anwendung dieser Formel trifft die Rechnung ebenfalls mit der BinomialFormel für die Differenzialen der WurzelGröße, nämlich mit dem Ausdrucke $\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1} dx = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} dx$ zusammen. Würde z. B. $d\sqrt[3]{3}$ verlangt: so würde nach der BinomialFormel $d\sqrt[3]{x} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} dx = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$ gefunden werden, wie es diese neue Methode giebt. Das ist denn auch der Fall bei den veränderlichen Größen mit negativen Eksponenten: z. B. $dy^{-m} = -my^{-m-1} dy$, welches

gleich

gleich $-\frac{m\,dy}{y^{m+1}}$ oder wenn $m = 1$, so ist dy^{-1} oder $d\frac{1}{y} = \frac{dy}{y^2}$. Soll ferner das Differenzial von $\frac{x}{y}$ gefunden werden: so ist $\frac{x}{y} = x.\frac{1}{y}$ folglich $d\left(x.\frac{1}{y}\right) = dx.\frac{1}{y} + x.d\frac{1}{y} = \frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{y^2} = \frac{y^2\,dx - xy\,dy}{y^3} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$. Um endlich das Differenzial zwischen veränderlichen Faktoren x und y in einander, oder das Produkt xy zu finden, wird S. 86. in dem Differenzial von $x^2 = 2x\,dx = x\,dx + x\,dx$ für den einen Faktor x^2 blos y substituirt, und im andern Theile der Gleichung im ersten Gliede dy für dx, im zweiten aber y statt x gesetzt, um den Ausdruck: $dx^2 = 2x\,dx$ in $d(xy) = x\,dy + y\,dx$ zu verwandeln. Auf diese Weise glaubt der Verf. nicht nur den DifferenzialKalkul gegen die Beschuldigungen zu rechtfertigen, daß er eine bloße ApproksimationsMethode seü, oder daß sich (S. 84) aus Sätzen, die nicht vollkommen richtig sind, etwas Wares und Unfelbares herleiten lasse; sondern auch eine Methode ausfindig gemacht zu haben, welche als eine Folge der simpeln Analüse, die Differenzialen der verschiedenen Arten algebraischer Funktionen zu bestimmen im Stande ist, one daß absichtlich etwas weggeworfen werden dürfte. — Rez. räumt zwar dieser Methode (die übrigens früher sowol von deutschen als französischen Mathematikern vorgeschlagen worden ist) den letzten Vorzug ein. Indessen, wenn es auf ihre Entwickelung aus tiefer liegenden Gründen ankommt: so zeigen sich ser viele Schwierigkeiten, welche nicht leicht eine völlige Evidenz derselben verstatten. Der Verf. hat dies bei der Deduktion seiner Methode selbst gefühlt, und einige Einwürfe zu heben gesucht, welche dagegen gemacht werden können. Allein was darüber gesagt wird, befriedigt den strengen Mathematiker schwerlich. [Ei! ei! der gestrenge Herr! die Differenzial- und IntegralRechnung und ihre Deduktion ist wol das Non plus ultra von strenger Wissenschaft!!! —] Dahin gehört unter andern die

Hebung der Zweideutigkeit, daß $\frac{x^2 - x^2}{x - x} = 2x$ seün muß, welches doch auch $= x$ ist, wenn der Dividendus $x(x - x)$ geschrieben wird, wie solches füglich geschehen kann, weil $x^2 - x^2$ und $x(x - x)$ völlig gleiche Ausdrücke sind. Die Notwendigkeit, daß der Ausdruck $x\frac{x - x}{x - x}$ hier nicht gebraucht werden könne, leuchtet aus dem Wenigen, was hier darüber vom Verf. beigebracht worden ist, noch nicht ein. Aenliche Schwierigkeiten entstehen durch die Morville'sche BezeichnungsArt der DifferenzialIntegralRechnung. Was übrigens die algebraische Entwickelung der DifferenzialFormeln für verschiedene Potenzen der veränderlichen Größe betrift; so ist diese zwar für den Ausdruck dx^2 ser kurz und Lichtvoll; aber für die folgenden Potenzen, z. B. dx^3 u. s. w. fällt diese leichte Einsicht weg, wenn die Ausdrücke $\frac{x^3 - x^3}{x - x}$, $\frac{x^n - x^n}{x - x}$ unabhängig von einem vorhergehenden RechnungsFall, auf dessen scheinbare Analogie man sich stützt, gefunden werden sollen. Daß $\frac{x^2 - x^2}{x - x} = x + x$ und $x^2 - x^2 = 2x(x - x)$ seün müsse, fällt ser leicht in die Augen. [Ja wol, denn $x^2 - x^2 = x^2(1 - 1)$ und $2x(x - x) = 2x^2(1 - 1) = x^2(2 - 2)$: weil 1mal o und 2mal o und 3mal o und Millionenmal o immer nur o ist und bleibt.]

Aber wie entstehet der Ausdruck $x^3 - x^3$, durch eine bloße RechnungsOperation, und wo sind die beiden Faktoren eines Binomiums (von denen der eine $= x - x$ ist), welche $x^3 - x^3$ als Produkt hergeben müssen? Nimmt man z. B. $(x + x)^2(x - x)$: so ist $(x^2 + 2x^2 + x^2).(x - x) = 4x^2(x - x)$. Demnach würde $dx^3 = 4x^2 dx$ und nach der Analogie zu schließen $dx^n = n + mx^{n-1} dx$ seün, welches doch der BinomialFormel zu Folge falsch ist. — — [Wie entstehet es anders, als daß $x - x = o$, aber auch 2.o, 3.o, 4.o, 5.o oder n oder r mal o ewig nichts mer und nichts weniger als o ist. Nichts, Nichts und nichts weiter als Nichts giebt: daß folglich eins für das andere substituirt werden kann, daß $x^{n-1} dx$ auch $= x^{2n-1} dx = \frac{dx}{x^{n-1}}$ u. s. w. seün kann, weil eben $dx = o$

$= o$ ist. — —] Wodurch würde sich aber diese Unrichtigkeit wol einsehen lassen, wenn wir außer der hier vorgeschlagenen Methode keine zuverlässigere hätten. — [Wo denn um der göttlichen Evidenz oder evidenten Göttlichkeit von Methode willen? —] Diese wenigen Bemerkungen werden hinreichend seün, darzuthun, daß die angegebene BezeichnungsArt der Differenzialien neben der üblichen zwar ihren Platz finden, jedoch aber sie nicht entberlich machen könne. [Diese vorgeschlagene Methode liefert einen deutlichen Beweis, daß Differenzial- und IntegralRechnung mit nichts weiter als Nichtigkeiten zu thun hat. Eine Rechnung mit o oder Nichts ist.]

An einer andern Stelle der Allg. Lit. Zeit. 1803. S. 731 ließt man auch folgendes Wunderschöne, bei Leibe schlechterdings gar keinen Widerspruch in sich Enthaltende. — "Denn dx ist nur $=$ o in Beziehung auf jede angebliche Größe, aber es ist nicht etwa der Mangel aller Größe oder die absolute Null. Wenn daher x um dx wächßt; so wächßt es allerdings um Etwas und sein Wachsthum ist nicht absolut Nichts, sondern nur in Beziehung auf jede angebliche Größe. (Um Gotteswillen, als wenn dies nicht identisch wäre absolut Nichts, und Nichts in Beziehung auf jede angebliche Größe (noch so kleine oder noch so große Größe. —]

Es ist also gerade umgekert, wenn ich dx mit x zusammen neme: so kann ich sagen $x + dx = x$, das heißt x ist in Beziehung auf seine eigene Größe um Nichts gewachsen oder das Wachsthum ist unendlich klein; neme ich aber x weg; so ist dx an und für sich selbst nicht Null, sondern allerdings Etwas, nur nichts angebliches, nichts dem ad äquat, was durch Sinne dargestellt werden könnte, es ist die VernunftIdee von der absolut kleinsten Größe, der man sich in der Würklichkeit immer mer nähern, die man aber nie erreichen kann. [Ist diese denn nicht identisch mit o Nichts? — reine, nicht verschrobene überkünstelte Vernunft sagt es wenigstens.] Es ist ferner grundfalsch, daß eine Linie um einen mathematischen Punkt wachsen könne, denn dieser ist die Gränze einer Linie und hat keine Ausdenung, aber eine Linie kann ja nicht um eine Gränze wachsen; so ist auch dx eine Linie, deren Länge zwar gegen jede angebliche $=$ o ist, aber darum ist sie doch kein Punkt, und auch nicht etwa der Mangel einer Linie oder das absolute Nichts, sondern die Idee

der

der absolut kleinsten Linie, (kann nur die Idee von einer absolut kleinsten Linie statt finden, möglich seün, ist sie nicht offenbarer Nonsens?), die freilich so wenig, als alles übrige Absolute, realkonstruirt werden kann und also nur eine Linie in der Idee. — Man wollte hier das Absolute der Stetigkeit ausdrücken und wußte es nicht zur Geburt zu bringen. —

Doch was braucht es viel, man ersieht deutlich aus dieser Schrift, wie ser es der Welt bis jetzt an richtiger Einsicht und Kenntnis dessen gebrochen hat, was jede stetig krumme Linie und krummlinigte Figur in der reinen RaumLere und in der BewegungsLere in sich selbst zur Lösung ihrer eigenen Aufgaben bestimmt enthält, und notwendig enthalten und auf das bestimmteste das dazu Nötige bei weiterer zeither unterlassener Nachforschung auch aufweißen muß. — — Dies Geständnis will man eben sich nicht abdringen lassen.

Nur allein diese Kenntnisse und Einsichten in dies in und durch und mit jeder krummlinigten Figur und stetig krummen Linie gegebene Karakteristische jeglicher, — und dann bloße hinlängliche Gewandheit in Anwendung der sechs allgemeinen arithmetischen Regeln der UrrechnenLere darauf, kann die evidenteste und kürzeste Lösung jeglicher möglicher Weise hier vorkommenden Aufgaben nur gewären, was ein mer als heiliges Vergnügen schaft. —

Es ist nötig zur gänzlichen Darniederbeugung und Vernichtung der Differenzial- und IntegralRechnung, ob sie gleich einen großen innig von mir vererten Leibniz zum Urheber hat, auch die neueste sie vertheidigende Erklärung, Erläuterung oder neue Begründung derselben, die eines L'Huilier, welcher sie durch seine, ihr zum Grunde untergeschobenen, Begriffe von Verhältnissen (der Veränderungen) der Differenzen der veränderlichen Größen zu einander und von den Gränzen dieser Verhältnisse derselben von Neuem zu befestigen geglaubt hat, zu vernichten. — Wir haben uns vorzüglich im 1. Theile seiner principiorum calculi differentialis et integralis expositionis elementaris. Tub. 1795. an das 2te Kap., welches von den Differenzial- und IntegralVerhältnissen handelt, zu halten: Wir werden ihn geteutscht hören und mit Kriterien der unerbitterlichsten Evidenz begleiten. Seine Worte sind

§. 23. Es seü x^n Potenz irgend einer veränderlichen Größe x. Es seü auch $a^{n-1}x$, das Faktum aus derselben veränderlichen Größe durch die gegebene a^{n-1} multiplizirt. Die veränderliche Größe x erleide irgend welche Veränderung Δx; woher die beiden Größen $a^{n-1}x$ und x^n zu $a^{n-1}.(x+\Delta x)$ und zu $(x+\Delta x)^n$ werden und alsdenn erleiden die erwänten Größen die zugleichen Veränderungen $a^{n-1}\Delta x$ und $\frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}x^{n-3}\Delta x^3 + \frac{n}{1}\ldots\frac{n-3}{4}x^{n-4}\Delta x^4 + \ldots$"

[Alles gut! nichts verbietet aber Statt $a^{n-1}x$ die Größe $a^{n-2}x^2$ zu wälen oder überhaupt die Größe $a^{n-r}x^r$ zu wälen und eine Beziehung der zugleich erleidenden Veränderungen beider, d. h. zwischen $2a^{n-2}x\Delta x + a^{n-2}\Delta x^2$ oder überhaupt zwischen $a^{n-r}(rx^{r-1}\Delta x + \frac{r}{1}.\frac{r-1}{2}x^{r-2}\Delta x^2 + \frac{r}{1}.\frac{r-1}{2}.\frac{r-2}{3}x^{r-3}\Delta x^3 + \frac{r}{1}\ldots\frac{r-3}{4}.x^{r-4}\Delta x^4 + \ldots.)$ und zwischen $\frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}x^{n-2}\Delta x^3 + \ldots.$ stattfinden zu lassen.]

Das Verhältnis dieser zu gleichen Veränderungen ist daher gleich dem Verhältnis

$$a^{n-1}:\frac{n}{1}x^{n-1} + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}x^{n-2}\Delta x + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}x^{n-3}\Delta x^2 + \frac{n(n-1)\ldots n-3}{1.2\quad 4}x^{n-4}\Delta x^4 + + \text{u. s. w.}$$

[mithin im zweiten Fall

$$2a^{n-1} + a^{n-1}\Delta x:\left[\frac{n}{1}x^{n-1} + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}x^{n-2}\Delta x + +\right.$$

$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}x^{n-1}\Delta x^2 + + + \text{u. s. w.}\Big]$$

und im allgemeinen Fall

$$\Big[\frac{n}{1}x^{n-1} + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^{n-2}\Delta x + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}x^{n-3}\Delta x^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}\cdot x^{n-4}\Delta x^3 \text{ u. s. w.}\Big].$$

$$\Big[a^{n-r}\Big[\frac{r}{1}x^{r-1} + \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}x^{r-2}\Delta x + \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}\cdot\frac{r-2}{3}x^{r-3}\Delta x^2 + \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}\cdot\frac{r-2}{3}\cdot\frac{r-3}{4}\cdot x^{r-4}\Delta x^3 \text{ u. s. w.}\Big]\Big]^{-r}$$

oder $$nx^{n-r}\Big[1 + \frac{n-1}{2}x^{-1}\Delta x + \frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot x^{-2}\Delta x^2 + \frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}x^{-3}\Delta x^3 \text{ u. s. w.}\Big].$$

$$\Big[ra^{n-r}\Big[1 + \frac{r-1}{2}x^{-1}\Delta x + \frac{r-1}{2}\cdot\frac{r-2}{3}\cdot\Delta x^2 + \frac{r-1}{2}\cdot\frac{r-2}{3}\cdot\frac{r-3}{4}x^{-3}\Delta x^3 \text{ u. s. w.}\Big]\Big]^{-r}$$

Allein wie kommt man denn hier auf einmal dazu, nach einem Verhältnis der Veränderungen beider Funktionen $a^{n-r}x^r$ und x^n zu fragen, da man nach keinem Verhältnis der Funktionen selbst, noch nach einer Gleichsetzung derselben fragte? (Wären aber auch die Funktionen $a^{n-r}x^r$ und x^n einander gleich, so wäre $x = a$). Dieses Verhalten ist also hier ganz willkürlich, es ist ja kein Grund der Bedingung seines notwendigen Daseyns angegeben. Es ist wie vom Himmel gefallen erschienen.]

"So

"Sobald wie n irgend eine von der Einheit verschie-
„dene Zal ist, so weicht hierauf das Verhältnis vorbe-
„meldeter Größen vom Verhältnis $a^{n-1} : nx^{n-1}$ ab. (Nun dies gesteht man doch selbst ein, wie kann man aber dann das folgende annemen? —) Wie aber bei ebendemselben verbleibenden x und bei stets abnemender Δx, die Größe $\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} x^{n-2} \Delta x + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}$.

$x^{n-3} \Delta x^2 + \frac{n}{1} \ldots \frac{n-3}{4} x^{n-4} \Delta x^3 + \ldots$.

kleiner als jedwelche angebliche Größe werden kann; so wird alsdann die Größe $\frac{n}{1} x^{n-1}$ die Gränze der

Größe $\frac{n}{1} x^{n-1} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} x^{n-2} \Delta x + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} x^{n-3} \Delta x^2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \ldots \frac{n-3}{4} x^{n-4} \Delta x^3$

$+ + \ldots$. Und das Verhältnis $a^{n-1} : \frac{n}{1} x^{n-1}$ ist die Gränze des veränderlichen Verhältnisses

$a^{n-1} : \frac{n}{1} x^{n-1} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} x^{n-2} \Delta x^2 + \frac{n(n-1)}{1\ 2} \cdot \frac{n-2}{3} x^{n-3} \Delta x^2 + \frac{n}{1} \ldots \frac{n-3}{4} x^{n-4} \Delta x^3 + +$

u. s. w.

Oder die Gränze $\frac{\Delta . x^n}{a^{n-1} \Delta x} = \frac{n x^{n-1}}{a^{n-1}}$ und darauf

auch Gränze $\frac{\Delta . x^n}{\Delta . x} = n x^{n-1}$."

Kleiner als jedwelche angebliche — — man bedenke, als jedwelche angebliche — — Größe werden können, ist denn das nicht identisch mit o, nichts werden und ist denn nicht daher $\Delta x = o$ gesetzt, wiefern sie eben in dem Moment kleiner als jedwelche

che angebliche Größe wird? wie könnte man sich sonst einfallen lassen, im obigen Verhältnisse des 2te, 3te u. s. w. Glied als o oder Nichts im GränzVerhältnisse hinwegzulassen? Wird aber Δx so abnemend, daß es kleiner als jedwelche Größe wird, daß es o wird, so ist ja das ganze Verhältnis der zu gleichen Veränderungen der Größen $a^{n-1}x$ und x^n, d. h. alsdann ist $a^{n-1}\Delta x = o$ und auch $\frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}x^{n-3}\Delta x^3 + + \ldots = o$

Mithin das erste sowol, wie das zweite und dritte und nte Glied $= o$ oder mit o multiplizirt, da dann $\Delta x^2 = \Delta x = \Delta x^3 = \Delta x^n$, weil o in der 1ten, wie in der nten Potenz in alle Ewigkeit o bleibt und nie etwas endlich kleines wird. Also wird das Verhältnis der Veränderungen

$a^{n-1}\Delta x : \frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}x^{n-3}\Delta x^3 + + \ldots$ zu $a^{n-1}o : o$.

$\frac{n}{1}x^{n-1} + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}x^{n-2}o + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.x^{n-3}o + \frac{n}{1}.\frac{(n-1)}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}x^{n-4}o + + \ldots$

oder $a^{n-1} : \frac{n}{1}x^{n-1} + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}x^{n-2} + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}x^{n-3} + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}x^{n-4} + + \ldots = a^{n-1} : [(x+1)^n - x^n]$ wird insofern die eigentliche Gränze des veränderlichen Verhältnisses

$a^{n-1}\Delta x : (x+\Delta x)^n - x^n = a^{n-1}.\left(\frac{n}{1}x^{n-1} + \frac{n}{1}.\right.$

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^{n-2}\Delta x + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}x^{n-3}\Delta x^2$$

$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}x^{n-4}\Delta x^4\Big) \text{ wiefern}$$

als bei ebendemselben verbleibenden x die Größe

$$a^{n-1}\Delta x \text{ und } \frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}x^{n-2}\Delta x^2$$

$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}x^{n-3}\Delta x^3 + + \text{ zu gleicher}$$

Zeit kleiner als jedwelche angebliche Größe d. h. $=0$ werden kann und eben wird, wiefern nämlich Δx es wird, oder allgemein $a^{n-r}(x+\Delta x)^r - a^{n-r}x^r : (x+\Delta x)^n - x^n$ Mithin die Gränze des Verhältnisses dieser Veränderung, wenn Δx kleiner, als jede angebliche Größe wird, d. h. wenn es $=0$ wird, ist

$$a^{n-r} : \frac{(x+1)^n - x^n}{(x+1)^r - x^r} = \frac{(x+1)^n - x^n}{((x+1)^r - x^r)\,a^{n-r}}$$

Also ist $\frac{(x\pm 1)^n - x^2}{\pm a^{n-1}}$ eigentlich der evidenteste Ausdruck für das Wachsthum oder für die Abname der beiden veränderlichen Größen $a^{n-1}x$ und x^n. Denn das natürlichste ist es doch zu setzen, daß x um die Einheiten seiner Menge vor allen Dingen wachse oder abneme. Wenn anders dies das Prinzip der Stetigkeit der Veränderungen ist; auf welche Natur oder welches Prinzip der Größen oder ihrer Veränderungen man zu achten hat.]

"Weil aber diese Weise des Bezeichnens der Gränzen $\frac{\Delta.x^n}{a^{n-1}\Delta x}$ oder der Gränzen $\frac{\Delta.x^n}{\Delta.x}$ für den Kalkul weniger bequem ist; und doch dieses Zeichen und andere ähnliche am ofte[illegible]ten überkommen; so hat man der Leichtigkeit des Kalkuls wegen (und zwar, was zu bemerken ist, einzig dieser Ursache wegen) dem weniger bequemen Zeichen

$$\frac{\Delta.x^n}{\Delta x}$$

$\frac{\Delta . x^n}{\Delta x}$ dieses $\frac{d . x^n}{dx}$ stattgesetzt und solcher Weise die Gleichung $\frac{d . x^n}{dx} = n x^{n-1}$ gebildet.

§. 34. Recht ser hat man sich zu hüten, etwa zu glauben, das Sümbol $\frac{d . x^n}{d . x}$, welches die Form der aus zweien zusammengesetzten Größe an sich trägt, seŭ würklich ein zusammengesetztes Sümbol und bezeichne einen Bruch, dessen Sätze $d . x^n$ und dx sind; gleichwie $d . x^n$ und dx gewisse Größen bezeichneten und daß ich mich so ausdrücken darf, Kleinigkeitleine, Geringigkeitleine der waren Größen $\Delta . x^n$ und Δx; oder man hüte sich, etwa zu glauben, aus der Gleichung $\frac{d . x^n}{dx} = n x^{n-1}$ könne abgeleitet werden, diese $d . x^n = n x^{n-1} dx$. (Daß dieses doch jedes Mal vor und bei jeder Integration geschieht, werden wir weiter unten sehen.)

Der Ausdruck $\frac{d . x^n}{dx}$ ist umfassend und eigenthümlich und zum Bezeichnen der Eksponenten der Gränzen des Wachsthums zugleicher Verhältnisse veränderlicher Größen x^n und x der Leichtigkeit wegen eingefürt worden; und wieviel Fortschritte seines Ursprungs $\frac{\Delta . x^n}{\Delta . x}$ er enthalten möge, so hat man die einzeln beobachteten Zeichen dx^n und dx gerade für keine weitern oder erweiterten Beziehungen auf die waren Größen $\Delta . x^n$ und Δx festiglich zu halten. [Wenn dieser Begriff einfach seŭn soll, so hätte man nur nicht sein Sümbol aus den einfachen Sümbolen anderer Begriffe konstruiren sollen, die dann stetig an einen zusammengesetzten Begriff erinnern und absolut die stete Verfürung und Bedingung, ihn so anzusehen, in sich enthalten. Doch an ihrem Gebrauch, an ihren Früchten und nicht an der untergeschobenen Auslegung derselben, sollt ihr sie erkennen! und was besagen diese denn anders als —? — —] Eben diese Erinnerungen halte ich um so mer hier zu machen für notwendig, weil diese Lere (Leere) von einigen leeren (lerenden) Fragen verfolgt worden sind; welche niemals aufgeworfen worden

seŭn

seün würden, wenn die Mathematiker auf die ächte Beschaffenheit jenes Sümbols geachtet haben würden *).

"Mit Vorangehung dieses Beispiels wird man leicht jene folgenden Erläuterungen einsehen und fassen.

"§. 25. Erläuterungen. Die Gränze des Verhältnisses der Veränderungen, welche zwei oder merere veränderliche Größen zugleich erleiden, nennt man das Differenzial-Verhältnis derselben und den Eksponenten dieses Verhältnisses nennt man den Differenzial-Eksponenten. Die Verrichtung, in welcher nach dem Differenzial-Eksponenten gefragt wird, wird die Differenziirung genannt. Desgleichen der Kalkul, welcher sich mit dem Erfinden der Differenzial-Verhältnisse befaßt, der Differenzial-Kalkul genannt wird.

Es seü P eine Funktion der veränderlichen Größe x, so wird der Differenzial-Eksponent dieser Größen bezeichnet durch $\frac{dP}{dx}$. Desgleichen sind P und Q irgend jezwei veränderliche Größen bezeichnet durch $\frac{dP}{dQ}$. Und die Sümbole $\frac{dP}{dx}$, $\frac{dP}{dQ}$ bezielen eben so viele einfache Zeichen mit keinem

*) Einige jedoch, welche die rechte Natur dieses Zeichens erkannt zu haben scheinen, wagen es nicht, wie ich hier, Ihre Meinung oder Sentenz auszudrücken; Man sehe z. B. die Abhandlung des Abts Kaluso in den neuen Kommentarien der Turiner Akademie T. II. wo solcher Weise der Autor dahin entscheidet: Il ne suffit pas de voir clairement que $\frac{dv}{dx}$ etant la limite du raport $\frac{\Delta v}{\Delta x}$; $\frac{dz}{dx}$ la limite du raport $\frac{\Delta z}{\Delta x}$; on aura, $\frac{dv}{dx} = z + \frac{dz}{dx}$ lorsque $v = xz$; mais, il faut d'abord attacher une idée reelle et precise a dv, dx, dz; afinque ces expressions signifient quelque chose par elles mêmes et independamment les unes des autres. Da nämlich ein ser scharfsinniger Mann gleicher Gestalt die Schwierigkeit eingewandt hat; daß aus der fortgeschrittenen Sache möchte auf die Gränze zu schließen seün, und mit der ersten Einfürung jenes Zeichens seü dem Leser dessen ware Bedeutung einzuprägen.

nem aufweißendem Verhältnisse oder Grunde einer scheinbaren Verbindung derselben.

Daher wenn P die Potenz der veränderlichen Größe x von jedwelcher nten Ordnung wäre, so ist $\frac{dP}{dx} = n x^{n-1}$ (§. 23). Gleicher Maßen seŭ Q eine andere Potenz von der Ordnung m der veränderlichen Größen x; so wird $\frac{dQ}{dx} = m x^{m-1}$ seŭn. Daher $\frac{dP}{dQ} = \frac{n}{m} x^{n-m}$."

[Mit nichten, nach obigen Schlüssen wird $\frac{dP}{dx} = (x+1)^n - x^n$ und $\frac{dQ}{dx} = (x+1)^m - x^m$ daher $\frac{dP}{dQ} = \frac{(x+1)^n - x^n}{(x+1)^m - x^m}$

"Mithin $\lim. \Delta P : \Delta x = n x^{n-1} : 1$
Desgleichen $\lim. \Delta x : \Delta Q = 1 : m x^{m-1}$
Also $\lim. \Delta P : \Delta Q = n x^{n-1} : m x^{m-1}$
Oder $\frac{dP}{dQ} = \frac{n}{m} x^{n-m}$

*) $\lim : \Delta P : \Delta x = (x+1)^n - x : 1$
$\lim : \Delta x : \Delta Q = 1 : (x+1)^m - x^m$
$\lim : \Delta P : \Delta Q = (x+1)^n - x^n : (x+1)^m - x^m$
$\frac{dP}{dQ} = \frac{(x+1)^n - x^n}{(x+1)^m - x^m}$.

"Desgleichen seŭ P die Funktion der veränderlichen Größe x, wie sie folgt:

$P = Ax^a + Bx^b + Cx^c + Dx^d + \ldots Lx^l + Mx^m + Nx^n$ wird $dP(dx)^{-1} = Aax^{a-1} + Bbx^{b-1} + Ccx^{c-1} + Ddx^{d-1} + \ldots Ll^{l-1} + Mx^{m-1} + Nx^{n-1}$"

[Mit nichten $\frac{dP}{dx} = 1 = A(x+1)^a + B(x+1)^b + C(x+1)^c + D(x+1)^d + + \ldots + L(x+1)^l + M$.

$+ M(x+1)^m + N(x+1)^n - Ax^a - Bx^b - Cx^c - Dx^d - - \ldots - Lx^l - Mx^m - Nx^n.]$

"§. 26. Der Uebung wegen füge ich einige Beispiele von verschiedenen Funktionen bei. Es sind P und Q zwei veränderliche Größen, welche z. B. auf dieselbe veränderliche Größe x bezogen werden: nach den DifferenzialEksponenten $\frac{d.PQ}{dx}$ wird gefragt.

$$(P+\Delta P)(Q+\Delta Q) = PQ + P\Delta Q + Q\Delta P + \Delta P\Delta Q$$

$$\Delta.PQ = P\Delta Q + Q\Delta P + \Delta P\Delta Q$$

$$\frac{\Delta.PQ}{\Delta x} = P\frac{\Delta Q}{\Delta x} + Q\frac{\Delta P}{\Delta x} + \frac{\Delta P}{\Delta x}\Delta Q$$

Daher $\lim.\frac{\Delta.PQ}{\Delta x} = P\lim:\frac{\Delta Q}{\Delta x} + Q\lim:\frac{\Delta P}{\Delta x}$,

Oder $d.\frac{PQ}{dx} = P\frac{dQ}{dx} + Q\frac{dP}{dx}$."

Nach unsern obigen Schlüssen also, wo dx als schwindend, als stets abnemend, endlich als kleiner als jede angebliche Größe wird und wiefern P und Q Funktionen von x, mithin ΔP und ΔQ Funktionen von x und Δx, also wiefern statt Δx gesetzt wird dx und dieses als verschwunden in dem DifferenzialVerhältnis von $\frac{\Delta.QP}{\Delta.x}$ geachtet wird; sofern ist

$$\lim:\frac{\Delta.P.Q}{\Delta x} = \frac{d.PQ}{dx} = \frac{((P+1)(Q+1)-(PQ))}{(x+1)-x}$$

"Auf gleiche Weise $\frac{d.PQR}{dx} = PQ\frac{dR}{dx} +$

$$R\frac{d.PQ}{dx} = PQ\frac{dR}{dx} + PR\frac{dQ}{dx} + QR\frac{dP}{dx};$$

$$\frac{d.PQRS}{dx} = PQR\frac{dS}{dx} + S\frac{d.PQR}{dx} = PQR\frac{dS}{dx} + PQS.$$

$$+ PQS.\frac{dR}{dx} + PRS\frac{dQ}{dx} + QRS\frac{dP}{dx}$$ Und so ferner:"

Aus unserer vorigen Ableitung ergiebt sich deutlich, daß lim: PQR gleich seŭ der Differenz von den beiden Fakten aus den drei oder n Funktionen (P Q und R), wo ich einmal $x + 1$ statt x setze, alles entwickelt habe und dann blos x in die Funktionen setze und sie von der vorigen abziehe. Diese Ableitung widerspricht offenbar der folgenden des angefürten Autors.

Nämlich der DifferenzialEksponent von jedwedem Produkte wie vieler veränderlichen Größen und irgend einer andern veränderlichen Größe x ist gleich der Summe aller Produkte aus alle den ersten Größen irgend eine davon ausgenommen, durch den DifferenzialEksponenten dieser Größe und der merbesagten Größe x. Dieselbe Regel wendet man an zum Erfinden der DifferenzialEksponenten der gebrochenen Größen.

Denn $P = PQ^{-1}$ Daher $\frac{d.\frac{P}{Q}}{dx} = P\frac{d.Q^{-1}}{dx}$

$+ Q^{-1}\frac{dP}{dx}$ aber (§. 25) $\frac{dQ^{-1}}{dx} = -Q^{-2}\frac{dQ}{dx}$;

und daher $\frac{d.\frac{P}{Q}}{dx} = Q^{-1}\frac{dP}{dx} - PQ^{-2}\frac{dQ}{dx}$

$$= \left[Q\frac{dP}{dx} - P\frac{dQ}{dx}\right]Q^{-2}$$

Dieser DifferenzialEksponent wird auch auf die folgende Weise erhalten. Es seŭ $\frac{P}{Q} = Z$ so wird $P = QZ$;

deswegen $\frac{dP}{dx} = Q\frac{dZ}{dx} + Z\frac{dQ}{dx} = Q\frac{dZ}{dx} + \frac{PdQ}{Qdx}$

$\frac{dZ}{dx}$

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{1}{Q}\cdot\frac{dP}{dx} - \frac{PdQ}{QQdx} = \left(Q\frac{dP}{dx} - P\frac{dQ}{dx}\right)\cdot Q^{-2}$$

Das ist: man multiplizire den Nenner des Bruches durch den DifferenzialEksponenten des Zälers, von diesem Faktum ziehe man ab jenes des Zälers durch den Differenzial-Eksponenten des Bruches." (Wenn die Gränze des Differenzial-Verhältnisses eines Bruches, dessen Zäler und Nenner Funktionen von der veränderlichen Größe x sind, gesucht und verlangt wird, so hat man in die gegebenen Funktionen $x + 1$ statt x zu setzen und dann von diesen Bruch, worin x zu $x + 1$ geworden ist, den abzuziehen, wo x seinen Wert behalten hat.

Auf diesen Beispielen gründet sich der ganze Differenzial-Kalkul, was die gänzlich algebraischen Funktionen betrift. (Von den transzendenten und EksponentialGrößen werden wir nachmals reden. Es seŭ der Abwechselung wegen die Größe $\sqrt[3]{(axx - x^3)}$, dessen DifferenzialEksponent verlangt wird.

Es seŭ $P = (ax^2 - x^3)^{\frac{1}{3}} = \frac{dP}{dx} = \frac{1}{3}(ax^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}}$.

$$(2ax - x^2) = (2ax - 3x^2)\,\tfrac{1}{3}(ax^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{(2ax - 3x^2)}{3x(x(a-x)^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2a - 3x}{3(x(a-x)^2)^{\frac{1}{3}}}.$$

[Wenn $P = (ax^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}$, so ist $P^3 = ax^2 - x^3$ und $P^3 + 3P^2\Delta P + 3P\Delta P^2 + \Delta P^3 - P^3 = (a - x - \Delta x)(x + \Delta x)^2 - (ax^2 - x^3)$; $2ax\Delta x + a\Delta x^2 - 3x^2\Delta x - 3x\Delta x^2 - \Delta x^3 = 3P^2\Delta P + 3P\Delta P^2 + \Delta P^3$ mithin, wenn Δx kleiner als jedwede angebliche Größe, im Vermindern, geachtet wird, so ist auch ΔP dafür zu achten und beide sind $= o$ zu setzen, mithin sind es auch die höhern Potenzen und also

$3P^2.o + 3Po^2 + o^3 = (2ax + a - 3x^2 - 3x - 1).o$

$3P^2 + 3P + 1 = a(2x + 1) - 3x^2 - 3x - 1$

Oder $\lim.\frac{\Delta P}{\Delta x} = (P + 1) - P = [(a - (x + 1)).$

$(x + 1)^2]^{\frac{1}{3}} - (ax^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}]$.

Es señ $P = x^m y^n + Ax^p y^q + Bx^r y^s + Cx^t y^v + \ldots$

$$\frac{dP}{dx} = mx^{m-1}y^n + pAx^{p-1}y^q + rBx^{r-1}y^s + tC^{t-1}y^v + \ldots + \frac{dy}{dx}(nx^m y^{n-1} + qAx^p y^{q-1} + Bsx^r y^{s-1} + Cvx^t y^v + \ldots)$$

$(P+1) - P = (x+1)^m (y+1)^n + A(x+1)^p \cdot (y+1)^q + B(x+1)^r (y+1)^s + C(x+1)^t \cdot (y+1)^v \ldots$ u. s. w. $- (x^m y^n + Ax^p y^q + Bx^r y^s + Cx^t y^v \ldots)$

giebt die obige von uns entwickelte SchlußFolge zur Gränze der Verhältnisse der Veränderungen.

27) Gleichwie man aus den gegebenen veränderlichen Beziehungen zweier oder mererer veränderlicher Größen ihr DifferenzialVerhältnis zu finden verlangt; so kann man umgekert nach der veränderlichen Beziehung (Relation) der Größen selbst aus dem gegebenen DifferenzialVerhältnis zweier oder mererer veränderlicher Größen fragen. Diese Beziehung (Relation) nennt man IntegralVerhältnis. Die Verrichtung, wo dieses IntegralVerhältnis gesucht wird, heißt Integrirung; und der Kalkul, welcher sich mit der Erfindung der IntegralVerhältnisse befaßt, wird IntegralKalkul genannt.

Beispiele. Es señ gegeben das DifferenzialVerhältnis $\frac{dP}{dx} = x^n = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n$, so wird das IntegralVerhältnis $P = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

Das DifferenzialVerhältnis señ $\frac{dP}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$; so wird das IntegralVerhältnis $P = xy$.

$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{yy}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)$; so wird das Int. Verh. $P = \frac{x}{y}$.

[Da

[Da wir die Gränze des DifferenzialVerhältnisses von x^n fanden $(x+1)^n - x^n = \frac{\Delta P}{\Delta x} = (u)^n - (u-1)^n$,

wenn $u = x+1$, von $P = xy = \lim: \frac{\Delta P}{\Delta x} = (x+1)$.

$(y+1) - y.x$ auch $= (uz) - (u-1)(z-1)$

von $P = \frac{x}{y}$; $\lim: \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{x \pm 1}{y \pm 1} - \frac{x}{y}$; so müssen also die IntegralVerhältnisse anders beschaffen seün, als die unsers Autors, wenn aus ihnen rationale Differenziale zurückgeschlossen und gefunden werden sollen. Wenn aber die DifferenzialVerhältnisse der Evidenz und Richtigkeit ihrer Sätze zeither gebrachen, wie wir oben mit aller Evidenz dargethan haben, wie läßt sich Evidenz und Richtigkeit in den Resultaten der zeitherigen höhern Mathematik erwarten. Sie muß absolut mangeln und nur Zufall ist es, wenn sie mit den waren übereinstimmen.]

"Anmerkung. Wenn in der gegebenen veränderlichen Relation zweier oder mererer umfassender veränderlicher Größen, Sätze von diesen zum Theil unter die beständigen gehören, so haben eben diese beständigen Sätze oder Glieder keinen Einfluß auf den DifferenzialEksponenten; sie bewürken keine Veränderung in ihm.

Weswegen umgekert in einem gegebenen DifferenzialEksponenten zweier oder mererer veränderlicher Größen ein einziges IntegralVerhältnis ihm nicht entspricht. Allein dieses Verhältnis kann außer veränderlichen durch das DifferenzialVerhältnis bestimmten Größen einen beständigen Satz (ein Glied) aufnemen, welcher sonst durch C bezeichnet wurde.

So daß wenn $\frac{dP}{dx} = x^n$; so werde $P = C + \frac{1}{n+1} x^{n+1}$;

$$\frac{dP}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}; \qquad P = C + xy$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{yy}; \qquad P = C + \frac{x}{y}.$$

Diese beständige Größe C ist, da sie in Beziehung mit dem Differenzial-Verhältnisse steht, unbestimmt und meistens aus der Natur der jedes Mal vorgelegten Aufgabe zu bestimmen. (Also kömmt alles Hauptsächliche auf die Natur der Aufgabe doch an. — Welche Evidenz!)

Beispiel. Es seŭ $\frac{dP}{dx} = (x-a)^n$ und man fragt nach dem Integral-Verhältnis, das diesem Differenzial-Verhältnis entspricht, so daß jenes Verhältnis verschwindet, wenn $a = x$ ist.

Daher $P = C + \frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}$. Jetzt verschwindet die Größe $\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}$ indem $x = a$ gesetzt wird; daher $C = o$ und $P = \frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}$, welches nun das vollständige Integral-Verhältnis genannt wird.

Es seŭ aber $\frac{dP}{dx} = (a+x)^n$ und man verlangt ein solches Integral-Verhältnis, so daß es verschwinde mit dem Gleichwerden von $x = o$

$P = C + \frac{1}{n+1}(a+x)^{n+1}$ Mithin beim Setzen $x = o$, $(a+x)^{n+1}$ wird a^{n+1} Also $C = -\frac{1}{n+1}$. a^{n+1} Alsdann $P = \frac{1}{n+1}((a+x)^{n+1} - a^{n+1})$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{1}a^n x + \frac{n+1}{1}\cdot\frac{n}{2}a^{n-1}x^2 + \frac{n+1}{1}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{n-1}{3}a^{n-2}x^3 + \frac{n+1}{1}\cdots\frac{n-2}{4}\cdot a^{n-3}x^4 + \ldots\right)$$

$$= a^n x + \frac{n}{2}a^{n-1}x^2 + \frac{n}{2}\cdot\frac{n-1}{3}a^{n-2}x^3 + \frac{n}{2}\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{3\cdot 4}a^{n-3}x^4 + \ldots$$

Bei-

Beispiel. Es seŭ $\frac{dP}{dx} = \frac{1}{a+x} = (a+x)^{-1}$;
und es seŭ $P = o$ wann $x = o$ ist.

$$P = \frac{x}{a} - \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{a^2} + \tfrac{1}{3}\frac{x^3}{a^3} - \tfrac{1}{4}\frac{x^4}{a^4} + \tfrac{1}{5}\frac{x^5}{a^5} - \tfrac{1}{6}\cdot \frac{x^6}{a^6} + \ldots$$

Ist hier nicht ebenfalls erst gesetzt

$$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \frac{x^4}{a^5} - \frac{x^5}{a^6}$$

u. s. w. ins ∞
und dann mit dx zu beiden Seiten multiplizirt, nachher integrirt?

$$dP = \frac{dx}{a} - \frac{x\,dx}{a^2} + \frac{x^2\,dx}{a^3} - \frac{x^3\,dx}{a^4} + \frac{x^4\,dx}{a^5}$$

$- + - +$ u. s. w.

$$P = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{a^3} - \tfrac{1}{4}\frac{x^4}{a^4} + \tfrac{1}{5}\frac{x^5}{a^5} - \tfrac{1}{6}\cdot \frac{x^6}{a^6} + \tfrac{1}{7}\frac{x^7}{a^7}$$ u. s. w.

Gesetzt es seŭ $\frac{dP}{dx} = (a-x)^{-1}$ und es seŭ $P = o$ wann $x = o$ ist, so ist L' Huillier'n

$$P = \frac{x}{a} + \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{a^2} + \tfrac{1}{3}\frac{x^3}{a^3} + \tfrac{1}{4}\frac{x^4}{a^4} + \tfrac{1}{5}\frac{x^5}{a^5} + \tfrac{1}{6}\cdot \frac{x^6}{a^6}$$ u. s. w. ins ∞

Denn $dP = \frac{dx}{a} + \frac{x\,dx}{a^2} + \frac{x^2\,dx}{a^3} + \frac{x^3\,dx}{a^4} + \frac{x^4\,dx}{a^5}$ u. s. w.

(+++) Man siehet aus diesem und andern Beispielen, die füglich wegbleiben können, also, daß es eitle Sophisterei ist, wenn man sagt: z. B. $\frac{dP}{dx} = (a+x)^n$ seŭ ein einfaches Sümbol oder Zeichen für einen einfachen Begriff (Sache) (??), bei dem keine Division noch Multiplikation in Gedanken kommen dürfe; daß es ein Verstecken des felerhaftesten Verfarens von der Welt, daß es ein willkürliches Abkürzen und Ergänzen one allen vernünftigen Grund ist, weil man mit der Menge von Gliedern nicht umzugehen, die des Polŭnomiums nicht zu ordnen wußte.

Zu sagen: Die Differenzial- und Integral-RechnungsMethode seŭ eine abgekürzte Rechnung, ist die seichteste Entschuldigung ihres aller gepriesenen Evidenz spottenden Gebrauchs in der gesammten Mathematik beim richtigen Gefül ihrer absoluten Felerhaftigkeit. Man sollte um keinen Preis vom schlichten Wege der Göttlichkeit, Warheit hinfüro weichen ab. —

Anmerkung. Nur Mangel an tiefer Kenntnis dessen, was die ganze schulgerechte Matheseis zu leisten vermag, kann nur solche Annamen entschuldigen, allein sie können nie gut geheißen werden. Bei Gott! es ist endlich ein Mal hohe Zeit, daß man es laut und öffentlich sage: bei allen ihren sonstigen "nicht zu verkennenden Verdiensten" und der Achtung, die ihrem Geiste gebürt — — brachten dennoch Leibnitz und Newton durch ihre Erfindung der Differenzial- und Integral-Rechnung Rechnung oder FluksionsRechnung der reinen und besonders der angewandten Mathematik den größten Nachtheil, sie fürten dadurch die Wissenschaft noch vor Euklid's ZeitAlter zurück, so trügerisch sie solche auch dadurch vervollkommnet und erweitert zu haben scheinen. Sie raubten ihr ihren eigenthümlichen Karakter, ihre Evidenz, sie hoben sie dadurch gleichsam selbst auf. Die neue Warheiten, die diese RechnungsArt zu Tage gefördert hat, sind dem glücklichen blinden Zufall zu danken, daß gerade die Feler sich wechselseitig aufhoben. Ungleich größern Schaden hat sie vorzüglich in der sogen. angewandten Mathematik dagegen angerichtet, so daß man noch jetzt der Theorieen spottet, weil sie mit der Erfarung nicht übereinstimmen und, beim rechten Lichte betrachtet, auch nicht mit ihr übereinstimmen können. Andern mer empirischen Wissenschaften machte jene sie gleich und gab dadurch ihren Nachrechnern und Nachbetern ein sanftes RuhePolster zum wachend Träumen

men und träumend Wachen im Rechnen. Bei Gott! es ist endlich hohe Zeit, daß man erwache und zum völligen Bewußtseün des der Mathematik und folglich auch des der mathematischen NaturLere und Technik (der MaschinenLere, Hydraulik, Astronomie u. dergl.) dadurch zugefügten unermeßlichen Schadens komme, ihn gut mache, ernstlich auf eine Wiedergeburt denke und — die reine Lere aus ihren Ur- und GrundSätzen mit ihrer ursprünglichen Evidenz herstelle und ableite, oder erst noch in ihrer ganzen Wesenheit entstehen lasse. —

Jeder Theil der Mathematik ist ein Ganzes, das nur aus sich selbst heraus sich entwickeln und lösen läßt und dessen Probleme one Beihülfe von etwas Ungleichartigem aufgelöst werden können und dürfen. — — Wie jene großen Männer und ihre Vorfaren und Nachfolger nicht obigen leichten, schlichten und ebenen wissenschaftlichen Weg zur Lösung der Probleme der Kreis- und KurvenLere auffinden und gehen konnten, ist mir unbegreiflich. — Noch unbegreiflicher aber das Folgende, von dem es Unglücks genug wäre, außer seiner Eksistenz hier nur noch ein Mal abgedruckt zu seün, jedoch soll es ein Geleite bekommen. —

Um jedoch den eben hier bei einigen leicht aufsteigenden Zweifel und Einwurf: ob man aber auch würklich die Methode und das Verfaren der DifferenzialRechnung gründlich kennen und sie auch in seiner Macht haben möchte? — gänzlich zu entkräften, mag nach dieser Abtheilung die Lösung des vor Jaren in einem eigenen Programme von Don Augustin de Pedrayes, Prof. d. Mathem. in Madrid in Spanien, aufgegebenen analütisch-geometrischen Problems folgen, welche Auflösung vom Vf. allein unter Teutschlands Analüsten über Berlin an ihn eingesandt wurde und warscheinlich, weil sie nicht mit — — — — begleitet war, den ausgesetzten Preis von funfzig Friedrichsd'or nicht erhielt. Diese Auflösung mag außer dem Obigen also beurkunden, ob und daß man jene Rechnungs-Methode kenne und in seiner Macht habe. —

Im Jarbuch der neuesten Litteratur Suppl. N°. 313. S. 469 u. 470, unter der Aufschrift

Theorie der trigonometrischen Linien

wol zu merken, stehet nämlich folgende Anzeige meiner rein wissenschaftlichen Deduktion oder Ableitung d. w. Verh. u. s. w.

Ser

Ser oft schon ist der Gang der theoretischen oder auf Theorie sich gründenden praktischen Wissenschaften der gewesen, daß man auf unvollkommnern Theorien und Wegen zu den vortreflichsten Resultaten gelangt ist, und nachdem diese lange in die allgemeine Summe des menschlichen Wissens übergegangen, manche andere Theile desselben aufgeklärt (?) und mit einem Worte die wolthätigsten Wirkungen hervor gebracht hatten, dachte man erst dran, die Quelle selbst zn läutern.

Eines der auffallendsten Beispiele ist der Differenzial- und IntegralKalkul. Bei der großen, so allgemeinen Erweiterung, die alle mathematische Wissenschaften durch ihn [durch ihn?!? — beware durch den Zufall] erhalten haben, wäre es schon an sich höchst ungerecht, anmaßend und unwar, wie unser Vf. S. 8 u. 9 thut, diesen Kalkul so verschreien zu wollen, als wäre es blos, "einem glücklichen Zufalle nach einem dem Herumtappen im Finstern gleichenden Suchen" zu danken, wenn man durch Kompensation von Felern richtige Warheiten durch ihn gefunden hätte. — [Wer und was bürgt denn dafür, daß Feler sich gerade kompensiren? — Wem anders als dem glücklichen blinden Ungefär sind also die Kompensation von Felern und die richtigen Warheiten zu danken? —] Nie konnte, das zeigt der allgemeine Gang der Wissenschaften, eine Lere ganz unwar seün, der wir so unendlich viele neue Warheiten verdanken. [Sind die Prämissen einer Lere unwar und falsch, so kann schlechthin nie Warheit aus ihnen oder aus ihr hervorgehen, nicht ihr, sondern dem glücklichen Ungefär und den zufällig eingemischten waren Sätzen einer andern Lere gehören die vielen neuen, gelegentlich hervorgegangenen, Warheiten nur zu, sie hat kein Verdienst darum, dies zeigt jede spätere gründliche Prüfung der Prämissen und des Ganges einer jeden Wissenschaft. —] "War ist es, daß man diesen Kalkul in den neuesten Zeiten auf ganz andere Gründe, als die ersten Erfinder baute, aber war ist es auch, daß gerade der große Geometer Lagrange, der dieses zuerst that, ganz anders dabei verfur als unser Verf. [Sind die Gründe und der Gang eines Kalkuls andere, so ist auch er ein anderer und nicht mer der vorige, es sind dann deren zwei verschiedene. — Eine andere Auslegung und derselbe alte Gang giebt den alten Kalkul und dessen Resultate immer wieder. Ob aber der neuere besser oder schlech-

ter

ter als der verdrängte seŭ, wird und muß sich mit der Zeit nachmals zeigen! — —]

"Letzterer triumphirt in der Vorrede und an manchen andern Orten seines Buchs über diese Entdeckung, fast als wäre sie sein Eigenthum, [was? sie soll nicht mein Eigenthum seŭn! ich ein Plagiarius von Lagrange's Eigenthum, das ich erst, durch diese Anzeige auf dessen Schrift aufmerksam gemacht, und als höchst verschieden von dem meinigen, wie sich jeder selbst tagtäglich überzeugen kann, kennen gelernt habe. Boshaftere Verläumdungen kann es in der Welt nicht geben.] und wie wenig benutzt er diese so fruchtbare Idee, wie wenig lernt man für Entwickelung, Behandlung und Darstellung dieser Reihen! Wie ganz anders geht, besonders in der Theorie des fonctions analytiques, der bei aller Größe so bescheidene Lagrange zu Werke, welches auch drei Jare vor dem unseres Verf. erschien.

[Bescheidenheit wird zur Sünde, wenn sie auf Kosten der Geradheit und Warheit ausgeübt wird. — Wissenschaftlichen Produkten gehet es wie denen der Natur, sie verleugnen ihre Abstammung nicht.]

Wie! eine Theorie der analütischen Funktionen muß mit einer Theorie der trigonometrischen Linie (oder ihrer Verhältnisse) identisch seŭn; was besagen denn die Titel der Lagrange'schen und Werneburg'schen Schriften und selbst die Ueberschrift dieser Anzeige! — kann wol eine fruchtbarere und wissenschaftlichere Benutzung, Entwickelung, Behandlung und Darstellung der Reihen bei einem besondern Gegenstande, wie die Theorie der trigonometrischen Linien ist, den sich eine Schrift zum Ziele setzte, als diese W — sche je Statt finden! — Wie so fruchtbar und glücklich an neuen Ideen und wie so streng wissenschaftlich und eigensinnig scharf Lagrange in der so gepriesenen Schrift Th. d. fonct. anal. in der Benutzung, Entwickelung und Darstellung der Reihen nur in Hinsicht der trigonometrischen Linien ist, wird sich sogleich weiter unten ergeben. Wie viel mathematischer und folgerechter als der Differenzial- und IntegralKalkul Lagrange's FunktionenKalkul in seiner Theorie der analütischen Funktionen seŭ, und wie viel er der Wissenschaft an Schärfe, Gründlichkeit und Deutlichkeit gefrommt, sie dem Ziele ihrer Vollkommenheit genähert oder gefernt habe, wird sich theils sogleich und in der Zukunft

kunft ganz ergeben. —] Wird wol, denn der Raum unſeres Blatts erlaubt nur einzelne Winke, der Vf. ſelbſt die beiden S. 23 für den zwölffachen (die 2- bis nfachen) Bogen aufgeſtellten gleichen Reihen als allgemeine und ware gelten laſſen? — [Was und wer vermag eine größere und unumſtößlichere Gültigkeit von Warheit und Allgemeinheit nach der ſo eben oben nachgetragenen philoſophiſchen Auseinanderſetzung oder deutlichern Entwickelung der Prinzipien der Theorie der Verhältniſſe trigonometriſcher Linien als die in dieſem Buche aufgeſtellten Reihen aufzuweiſen, — oder mit der mathematiſchen Gültigkeit von Warheit und Allgemeinheit iſt es lauter Trug und eitel Tand. — Warum bleibt denn Rez. den Beweis des Gegentheils noch immer ſchuldig? — —] Eben ſo iſt zu bedauern, daß der Verf. ſeine ganze numeriſche Entwickelung auf ſein Taun- oder DuodezimalSüſtem gründet. Wenn auch ſein Buch noch ſo viel wiſſenſchaftlichen Wert und neue Erfindungen hätte, ſo hätte es doch, eben um dieſe neue Warheiten geltend zu machen, in dem allgemein verſtändlichen ZalenSüſteme dargeſtellt werden ſollen. [Anderen ZalenSüſtemen gebricht es wol an der Allgemeinverſtändlichkeit!? — Zu bedauern iſt es, daß nicht ſchon lange oder doch von jetzt an, die Mathematiker und Rez. es ſich und man es ihnen zur offenbaren Schande angerechnet hat, daß ſie nicht nach jedem der noch faßbaren und verſtändlichen ZalenSüſtemen zu rechnen und darin dargeſtellte Warheiten zu faſſen vermögen, und von ihren LerStülen ihren Zuhörern, wenigſtens doch auch nach dem vollkommenen ZalenSüſteme vortragen. — Jeder Verſchub in die Zukunft ſollte ihnen als Verſündigung gegen die Menſchheit hoch angerechnet werden. — Wird denn nicht ſonſt gleich über die Trägheit des Gebrauchs von einfachern und evidentern Anſichten und Formeln in der Mathematik das Autodafee geſchleudert?! —]

Und wenn auch der gedultigſte und humanſte Leſer der ſer dunkeln Darſtellung [dunkeln!? armer bedauernswürdiger Rez.! du konnteſt ob deiner Unbekanntſchaft mit der Teliosadik gar nicht das Lichtvolle anen, das dir zum Dunkeln im Kopf wurde! —] durch das Buch aufmerkſam gefolgt wäre, die Feler überſehen, durch den anmaßenden Ton ſich nicht irre hätte machen laſſen, und die Schwierigkeit ſeines neuen ZalenSüſtems nicht geſcheut hätte, das man der Vergleichung wegen doch ſer oft überſetzen müßte,

te, [armer Mathematiker, du mußtest es erst übersetzen?! —] konnte er wol anders als mit Bedauern von dem Buche zurückkeren, daß der Verf. seine Arbeitsamkeit und seine Musse nicht seinem Buche im höhern Maaße geschenkt habe, das, wie es jetzt ist, das nicht einmal leistet, was Ausländer schon besser haben?" [Ich frage blos, was verspricht der Titel und wie entspricht der Inhalt dem Titel? —

Sogleich werden wir nun sehen, was Lagrange, denn diesen meint doch Rez. vorzüglich unter den Ausländern, würklich über diesen Gegenstand über die Theorie trigonometrischer Linien besser geleistet habe. —

Ich habe gerade die Grüsonsche Uebersetzung von Lagrange's Theorie des fonctions analytiques vor mir, welche 1798 bei Lagarde in Berlin unter dem Titel Lagrange's Theorie der analütischen Funktionen, u. s. w. erschienen war, und es befindet sich dann in der N°. 25–29. die so angepriesene besser seün sollende Theorie der trigonometrischen Linien von Lagrange. Ich hebe sie hier aus und werde meine kritischen Anmerkungen hie und da einschalten.

Es heißt N°. 25.

"Man kann obige Methode dazu anwenden, die Reihen zu finden, die den Sinus aus den [dem] Bogen, oder den Bogen aus den [dem] Sinus ausdrücken, welches zu verrichten man sich auch (wie Euler in[m] genanntem[n] Werke gethan hat) der endlich und des unendlich kleinen bedient.

Es ist war, wenn man von der bekannten Formel ausgeht, die zur Multiplikation der Winkel dient,

$$\cos. nx + \sin. nx \sqrt{-1} = (\cos. x + \sin. x \sqrt{-1})^n$$

so erhält man wechselseitig

$$\cos. x + \sin. x \sqrt{-1} = (\cos. nx + \sin. nx \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$$

wo n willkürlich genommen werden kann.

[Wie vor allen Dingen kommt man denn zu dieser Formel —? dies hätte gezeigt werden sollen mit rein wissenschaftlicher Evidenz: und dann, ist dies erlaubt und mathematische Schärfe und Consequenz imaginäre Größen wie $\sqrt{-1}$ in Ausdrücke für blos würkliche Dinge und Größen zu bringen, werden diese dadurch nicht selbst imaginär —?! — In unserer zum Grunde gelegten Formel, den Sinus von nx aus dem Sinus von x oder umgekert

kert aus sin.nx den sin.x zu finden, kömmt höchstens nur ein irrationaler Ausdruck (oder eine irrationale Größe) aber keine imaginäre vor, und in wie wenigen algebraischen Gleichungen wird diese irrat. vermißt?! —]

Obgleich von der folgenden Ableitung der Formeln eines Euler's, den Sinus und Kosinus aus dem Bogen zu finden, ein Lagrange in seiner Theorie der analütischen Funktionen §. 22. 1. Theil wie folgt, urtheilt; so giebt doch Euler hier den Grund an, wie man zu den Formeln gelangt, die auch Lagrange hier gebraucht, one jenen anzugeben. Die Formeln für die Entwickelung der EksponentialGrößen und der Logarithmen, in Reihen, sind hinlänglich bekannt, und man beweißt sie theils mittelst der DifferenzialRechnung, theils durch die bloße Formel des Binomii, indem man nämlich das unendlich Große und das unendlich Kleine in Betrachtung zieht, wie man es auch in Euler's Introductio in analysin findet. Obgleich diese BeweißungsArt, wovon, wie ich glaube, Halley der Erfinder ist (Trans. phil. nº. 216.) in der Analüsis aufgenommen werden kann, so muß man doch gestehen, daß es ihr an derjenigen Evidenz und Strenge felt, (weil sie sich des unendlich Kleinen und des unendlich Großen oder der o und des ∞ und der imaginären Größen bedient, um ihren Endzweck zu erreichen. —) welche in den AnfangsGründen einer Wissenschaft verlangt wird. Introductio in analysin infinitorum. Cap. VIII. §. 132. "Da $(\sin z)^2$ „$+ (\cos z)^2 = 1$ so wird dieser Ausdruck auch als aus „den beiden Faktoren hervorgehend zu betrachten seün „$(\cos z + \sqrt{-1}.\sin.z)(\cos.z - \sqrt{-1}.\sin.z) = 1$; „[Mithin auch wol aus $(\sin.z + \sqrt{-1}.\cos.z)(\sin.z -$ „$\sqrt{-1}.\cos.z) = 1$?] welche Faktoren obgleich imaginär „doch einen geistreichen Gebrauch im Vermeren und Vereinen der Bögen verstatten. Alsdann fragt man wol nach „dem Faktum dieser Faktoren $(\cos.z + \sqrt{-1}.\sin.z)$. „$(\cos.y + \sqrt{-1}.\sin.y)$ und man erhält $\cos.y \cos.z -$ „$\sin.y.\sin.z + (\cos.y \sin.z + \sin.y.\cos.z)\sqrt{-1}$. Da „aber $\cos.y \cos.z - \sin.y \sin.z = \cos.(y + z)$ und $\cos.y \sin.z + \sin.y \cos.z = \sin(y + z)$ ist, so wird dieses Produkt $(\cos.y + \sqrt{-1}.\sin.y)(\cos z + \sqrt{-1}.\sin z) = \cos.(y + z) + \sqrt{-1}.\sin.(y + z)$

Und gleicher Weise

$(\cos.y - \sqrt{-1}.\sin.y)(\cos z - \sqrt{-1}.\sin.z) = \cos.(y+z) - \sqrt{-1}.\sin.(y + z)$

Des=

Desgleichen
$(\cos.x \pm \sqrt{-1}.\sin.x)(\cos.y \pm \sqrt{-1}.\sin.y)(\cos.z \pm \sqrt{-1}.\sin.z) = \cos.(x+y+z) \pm \sqrt{-1}.\sin.(x+y+z)$.

Hieraus folgt daher, es werde
$(\cos.z \pm \sqrt{-1}.\sin z)^2 = \cos.2z \pm \sqrt{-1}.\sin.2z$
seün und $(\cos.z \pm \sqrt{-1}.\sin.z)^3 = \cos.3z \pm \sqrt{-1}.\sin.3z$. Mithin allgemein $(\cos.z \pm \sqrt{-1}.\sin.z)^n = \cos.nz \pm \sqrt{-1}.\sin.nz$. Deswegen wird
$\cos.nz + \sqrt{-1}.\sin.nz + \cos.nz - \sqrt{-1}.\sin.nz = (\cos.z + \sqrt{-1}.\sin.z)^n + (\cos.z - \sqrt{-1}.\sin.z)^n$ und $(\cos.z + \sqrt{-1}.\sin.z)^n - (\cos.z - \sqrt{-1}.\sin.z)^n = \cos.nz + \sqrt{-1}.\sin nz - \cos.nz + \sqrt{-1}.\sin.nz$. Folglich $\cos.nz = \frac{1}{2}(\cos.z + \sqrt{-1}.\sin.z)^n + \frac{1}{2}(\cos.z - \sqrt{-1}.\sin.z)^n$ auch $\sin.nz = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\cos.z + \sqrt{-1}.\sin.z)^n - \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\cos.z - \sqrt{-1}.\sin.z)^n$.

Diese beiden Ausdrücke in Reihen nach dem Binomium verwandelt, giebt

$$\cos.nz = \cos.z^n\left[1 - \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}\left(\frac{\sin.z}{\cos.z}\right)^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}\left(\frac{\sin.z}{\cos.z}\right)^4 - \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-5}{6}\left(\frac{\sin.z}{\cos.z}\right)^6 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-7}{2}.\left(\frac{\sin.z}{\cos.z}\right)^8 \text{ u. s. w.}\right]$$

$$\sin.z = \cos.z^n\left[\frac{n}{1}.\frac{\sin.z}{\cos.z} - \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\left(\frac{\sin.z}{\cos.z}\right)^3\right.$$

$$\left(\frac{\text{sin. z}}{\text{cos. z}}\right)^3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}\cdot\frac{n-4}{5}\left(\frac{\text{sin. z}}{\text{cos. z}}\right)^5 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\ldots\ldots\frac{n-6}{7}\cdot\left(\frac{\text{sin. z}}{\text{cos. z}}\right)^7 \text{ u. ſ. w.}\Big]$$

Es ſeŭ der Bogen z unendlich klein, ſo wird sin. z = z und cos. z = 1; jetzt ſeŭ n eine unendlich große Zal und der Bogen nz von endlicher Größe, ſo nemt an nz = v;

weil $\text{sin. z} = z = \frac{v}{n}$ ſo wird $\text{cos. v} = 1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{2.3.4} - \frac{v^6}{2.3.4.5.6} + \frac{v^8}{2.3.4.5.6.7.8}$ u. ſ. w.; $\text{sin. v} = v - \frac{v^3}{2.3} + \frac{v^5}{2.3.4.5} - \frac{v^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{v^9}{2.3.4.5.6.7.8.9}$ u. ſ. w.”

“Es ſeŭ nun der Ausdruck für sin. x in der Reihe des Bogens x, welcher er wolle, ſo kann er nur folgende Geſtalt haben $Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5$ u. ſ. w.; denn da der Sinus zu Null wird, wenn der Bogen = o, ſo iſt ſichtbar, daß dieſer Ausdruck kein einziges Glied one x haben kann. [Muß heißen: daß in dieſem Ausdrucke jedes Glied x als Faktor haben muß. Hieraus folgt aber nicht, daß der Ausdruck für sin. x in einer Reihe des Bogens x beſtehen, noch daß ſie dann nur die Geſtalt $x(A + Bx^2 + Cx^3$ u. ſ. w.) haben könne. Sie könnte eben ſo gut auch $x(A + Bx^{\frac{r}{m}} + Cx^{\frac{n+r}{m}}$ u. ſ. w. oder $x(A + B + C + D$ u. ſ. w. ſeŭn. Und geſetzt, die Reihe $Ax + Bx^2 + Cx^3$ u. ſ. w. ſeŭ war, woraus folgt denn, daß ſie unendlich ſeŭn müſſe? — Dieſer Beweis felt hier ganz; in der 2ten Abtheilung, der Rektifikation des Kreißes, iſt er zuerſt gefürt.]

Da

Da nun $\cos. x = \sqrt{[1 - \sin. x^2]}$ so hat man

$$\cos. x = \sqrt{[1 - A^2x^2 - 2ABx^3 - (2AC + B^2)x^4 - (2AD + 2BC)x^5 \text{ u. s. w.}]} = 1 - \frac{A^2x^2}{2} - ABx^3 - \left(AC + \frac{B^2}{2} + \frac{A^4}{8}\right)x^4 - \left(AD + BC - \frac{A^3B}{2}\right)x^5 \text{ u. s. w.}$$

Es ist bekannt, daß die Koeffizienten A. B u. s. w. vom Bogen x unabhängig sind [woher weiß man es hier? es könnte das Gegentheil ja vielleicht Statt finden. Weil der Ausdruck allgemein gültig seün soll, so müssen sie unabhängig vom Bogen seün.], folglich werden sie es auch von jedem andern Bogen seün. Substituirt man nun nx für x, so hat man ebenfalls:

$$\sin. nx = nAx + n^2Bx^2 + n^3Cx^3 \text{ u. s. w.}$$

$$\cos. nx = 1 - \frac{n^2A^2x^2}{2} - n^3ABx^3 - n^4\left(AC + \frac{B^2}{2} + \frac{A^4}{8}\right)x^4 - n^5\left)AD + BC - \frac{A^3B}{2}\right)x^5 \text{ u. s. w.}$$

Die vorhergehende Gleichung wird also diese Gestalt erhalten:

$$\cos. x + \sin. x\sqrt{-1} = [1 + nAx\sqrt{-1} + n^2\left(B\sqrt{-1} - \frac{A^2}{2}\right)x^2 + n^3(C\sqrt{-1} - AB)x^3 + n^4\left(D\sqrt{-1} - AC - \frac{B^2}{2} - \frac{A^4}{8}\right)x^4 + n^5\left(E\sqrt{-1} - AD - BC - \frac{A^3B}{2}\right)x^5 \text{ u. s. w.}]^{\frac{1}{n}}.$$

Entwickeln wir die zweite Hälfte nach der Art des Binomii, und machen zur Abkürzung

$$\mathfrak{X} =$$

$$\mathfrak{x} = Ax\sqrt{-1} + n\left(B\sqrt{-1} - \frac{A^2}{2}\right)x^2 +$$
$$n^2(C\sqrt{-1} - AB) + n^3(D\sqrt{-1} - AC$$
$$- \frac{B^2}{2} - \frac{A^4}{8})x^4 - n^4(E\sqrt{-1} - AD - BC$$
$$- \frac{A^3B}{2})x^5 \text{ u. f. w.}$$

so erhalten wir

$$\cos.x + \sin.x\sqrt{-1} = 1 + \frac{1}{n}(n\mathfrak{x}) + \frac{1-n}{2n^2}\cdot$$
$$(n\mathfrak{x})^2 + \frac{(1-n)(1-2n)}{2\cdot 3\ n^3}(n\mathfrak{x})^3 + \frac{(n-n)}{2}\cdot$$
$$\frac{(1-2n)(1-3n)}{3\cdot 4\ n^4}(n\mathfrak{x})^4 \text{ u. f. w.}$$
$$= 1 + \mathfrak{x} + \left(\tfrac{1}{2} - \frac{n}{2}\right)\mathfrak{x}^2 + \frac{(1-n)(1-2n)}{2\quad 3}\cdot$$
$$\mathfrak{x}^3 + \frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)}{2\quad 3\quad 4}\mathfrak{x}^4 \text{ u. f. w.}$$

Da die Werte von sin. x und cos. x unabhängig von der willkürlichen Größe n seyn müssen, so folgt, daß alle Sätze der zweiten Hälfte, die mit derselben Potenz von n multiplizirt sind, sich von selbst vernichten müssen. Bemerkt man also blos die Sätze, worin n sich nach der Entwickelung nicht befindet, so wird es leicht werden, einzusehen, daß die Größe $\mathfrak{x}$ sich auf den Satz reduzirt, nämlich $\mathfrak{x} = Ax\sqrt{-1}$; und daß die Koeffizienten den Potenzen von x nur noch diese sind $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{2.3.4}$ u. s. w.

[Streitet es nicht geradezu wider alle mathematische Evidenz und gepriesene Schärfe, eine Vernichtung, die erst nach völliger Entwickelung von selbst eintritt und eintreten kann, vor derselben schon eigenmächtig vorzunemen?: — und wäre man zu einer solchen voreiligen Vernich-

nichtung nicht auch vor der ersten Entwickelung in der nächst vorhergehenden Gleichung gleicher Gestalt ermächtigt und verschwindet dann nicht auch $\mathfrak{X} = Ax\sqrt{-1}$? –]

Auf diese Art [nicht doch! nach völlig vollendeter Entwickelung und dadurch erfolgter Vernichtung der Glieder, worin n als Faktor vorkömmt] bekömmt man $\cos.x + \sin.x\sqrt{-1} = 1 + Ax\sqrt{-1} + \frac{1}{2}(Ax\sqrt{-1})^2 + \frac{1}{2.3}(Ax\sqrt{-1})^3 + \frac{1}{2.3.4}(Ax\sqrt{-1})^4 + \frac{1}{2.3.4.5}(Ax\sqrt{-1})^5 + \frac{1}{2.3.4.5.6}$. $(Ax\sqrt{-1})^6$ u. s. w.

$[\cos.x + \sin.x\sqrt{-1} = 1 - \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^4x^4}{2.3.4} - \frac{A^6x^6}{2.3.4.5.6} + -$ u. s. w. $+ \sqrt{-1}(Ax - \frac{A^3x^3}{2.3} + \frac{A^5x^5}{2.3.4.5}$ u. s. w.), indem man die Potenzen von $\sqrt{-1}$ würklich macht." Und das giebt

$\cos.x = 1 - \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^4x^4}{2.3.4} + \frac{A^6x^6}{2.3.4.5.6}$ u. s. w.

$+ \sqrt{-1}(-\sin.x + Ax - \frac{A^3x^3}{2.3} + \frac{A^5x^5}{2.3.4.5}$ u. s. w.)

$\sin.x = Ax - \frac{A^3x^3}{2.3} + \frac{A^5x^5}{2.3.4.5} - +$ u. s. w.

$+ \sqrt{-1}(1 - \cos.x - \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^4x^4}{2.3.3} - \frac{A^6x^6}{2.3.4.5.6} + -$ u. s. w.) Die Resultate also sind

Gleichuagen oder Formeln mit imaginären Größen, und woraus der Sinus oder der Kosinus nicht blos aus seinem

nem Bogen x gefunden werden kann, weil der eine oder der andere nicht elimirt wurde, also selbst imaginär. —

Schon recht! solche Resultate müssen herauskommen, wenn man mit imaginären Größen bei würklichen Dingen rechnet und dabei one mathematische Evidenz und Schärfe einem mer als willkürlichen RechnungsGang befolgt und einschlägt. Doch man weiß sich zu helfen. —] Es heißt:

"Macht man würklich die Potenzen von $\sqrt{-1}$, und vergleicht die reellen Theile der beiden Hälften, so wie die imaginären, jede zusammen unter sich, so erhält man

$$\text{sin. } x = Ax - \frac{A^3x^3}{2.3} + \frac{A^5x^5}{2.3.4.5} - + \text{ u. s. w.}$$

$$\text{cos. } x = 1 - \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^4x^4}{2.3.4} - \frac{A^6x^6}{2.3.4.5.6}$$

$$+ - \text{ u. s. w.}"$$

Woher weiß man denn, daß die reellen so wie die imaginären Theile der obigen letzten Gleichung jede zusammen unter sich einander vernichten und aufheben, es konnte ja gerade das Gegentheil Statt finden. — Ich weiß nicht, ob die Leser den Mangel von mathematischer Evidenz und Schärfe, der in diesem RechnungsGange waltet, so fülen, wie ich. Wie leicht war es nicht, folgenden evidenten einzuschlagen, bei den einmal angenommenen obigen Prämissen.

Es seŷ war und gesetzt, daß $\text{sin. } x = Ax + Bx^2 + Cx^3$ u. s. w. Mithin $[\text{cos. } x + \text{sin. } x\sqrt{-1}]^n = [1 + nAx\sqrt{-1} + n^2\left(B\sqrt{-1} - 1 - \frac{A^2}{2}\right)x^2 + n^3(C\sqrt{-1} - 1 - AB)x^3 + n^4\left(D\sqrt{-1} - 1 - AC - \frac{B^2}{2} - \frac{A^4}{8}\right)x^4 + n^5\left(E\sqrt{-1} - 1 - AD - BC - \frac{A^3B}{2}\right)x^4$ u. s. w.] so ist aber auch

$(\text{cos. } x + \text{sin. } x\sqrt{-1})^n = [1 + Ax\sqrt{-1} - 1 + \left(B\sqrt{-1} - 1 - \frac{A^2}{2}\right)x^2 + (C\sqrt{-1} - 1 - AB)x^3 +$

$(D\sqrt{-1} - 1$

$$\left(D\sqrt{-1} - AC - \frac{B^2}{2} - \frac{A^4}{8}\right)x^4 + \left(E\sqrt{-1} - AD - BC - \frac{A^3B}{2}\right)x^5 \text{ u. s. w. }]^n$$

Entwickeln wir nun diese Formel nach Art des Binomiums und ziehen sie von der vorigen ab, so muß alles aufgehen, und was in einerlei Potenz von x multiplizirt ist, muß sich vernichten oder $= o$ seün, woraus sich die Werte der Koeffizienten von A, B, C u. s. w. in Zalen ergeben, weil der Wert vom Sinus x ganz unabhängig von der Größe n seün muß. Man erhält nämlich folgende Gleichungen nach völliger Entwickelung und Abziehung:

$$nAx\sqrt{-1} = Anx\sqrt{-1};\quad n^2B\sqrt{-1} - \frac{n^2}{2}A^2 - Bn^2\sqrt{-1} + \frac{n}{2}A^2 + \frac{n\,n-1}{1\quad 2}A^2 = o,$$

$$B = o,\quad n^3C\sqrt{-1} - n^3AB - nC\sqrt{-1} + nAB + \frac{n^2-n}{2}\left(2AB - \frac{A^3}{2}\sqrt{-1}\right)$$

$$= \frac{n\ (n-1)\ (n-2)}{1\quad 2\quad\ 2}A^3\sqrt{-1};\quad (n^3-n)C\sqrt{-1}$$

$$= \frac{n^3-n}{6}A^3\sqrt{-1},\quad C = -\frac{A^3}{6}$$ und so folgt

$$D = o,\quad E = +\frac{A^5}{2.3.4.5},\quad F = o,\quad G = -\frac{A^7}{2.3..7}$$ u. s. w. Diese Werte der Koeffizienten in den angenommenen Ausdruck für $\sin:x = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5$ u. s. w. gesetzt, giebt $\sin x = Ax - \frac{A^3x^3}{2^x.3} + \frac{A^5x^5}{3^x.3.4.5} - \frac{A^7x^7}{2.3..7} + -$ u. s. w. one alle imaginäre Größen, woraus sich der Ausdruck für

cos. x leicht bestimmen läßt. Jetzt bittet man, nur selbst diese ganze vielverwickeltere und höchst unnütz erschwerte Entwickelung und Darstellung der Reihen und des ganzen höchst unnütz erschwerten RechnungsGanges von Lagrange mit meiner ganz einfachen und schlichten und eben so allgemeinen Entwickelung, z. B. den sin. 3x oder sin. 5x zu finden, in meiner Schrift zu vergleichen, um zu entscheiden, welcher von beiden, W. oder Lagrange, faßlicher, evidenter und leichter zu Werke ging. — Des Beifalls der Nachwelt bin ich wenigstens gewiß. — Und ein direkter Beweis, daß die Reihe, den sin. x aus dem Bogen x zu finden, eine unendliche seün müsse, felt hier ganz.

An der Stelle, daß man etwa um den gefundenen Ausdruck, den Sinus aus seinem Bogen x zu finden, für war anerkannte, und nun setzte, der Bogen x seü hinwiederum durch seinen Sinus in einer änlichen Reihe von Potenzen des sin. x gegeben und mit einem Worte die Reihe umgekert hätte, wie folgt: Es ist $\sin. x = Ax - \frac{A^3 x^3}{2.3} + \frac{A^5 x^5}{2.3.4.5} - \frac{A^7 x^7}{2.3...7}$ u. s. w. und allgemein

$x = a \sin. x + b \sin. x^3 + c \sin. x^5 + d \sin. x^7$ u. s. w.

So ist dieser Wert von x in die vorige Gleichung gesetzt und sin. x zu beiden Seiten abgezogen, alles $= 0$, folglich hebt sich auch alles, was in die gleiche Potenz von sin. x multiplizirt ist, auf, und es gehen die nachfolgenden Werte für die Koeffizienten a, b, c, d, u. s. w. in Zalen hervor.

$$+ aA\left|\sin. x + Ab\right|\sin. x^3 + Ac\left|\sin. x^5 + Ad\right|\sin. x^7$$

$$-1\left| - \frac{A^3 a^3}{2.3}\right| - \frac{A^3 a^2 b}{2}\left| - \frac{A^3 a^2 c}{2}\right| \text{u. s. w.}$$

$$+ \frac{A^5 a^5}{2.3.4.5}\left| - \frac{A^3 a b^2}{2}\right|$$

$$+ \frac{A^5 a^4}{2.3.4}\left|$$

$$- \frac{A^7 a^7}{2.3..7}\right|$$

aA

$$aA = 1, \quad a = \frac{1}{A}$$

$$b = \frac{1}{2.3.A}, \quad c = \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5.A}, \quad d = \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7.A};$$

$$\text{Also } x = \frac{1}{A}\left[\sin.x + \frac{\sin.x^3}{2.3} + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\sin.x^5 + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\sin.x^7 \text{ u. s. w.}\right]$$

So aber schlägt man folgenden verwickelten, dunkeln und sehr erschwerten RechnungsGang ein.

No. 26.

"Um eben so den Wert von x in sin. und cos. von x zu haben, neme man die GrundGleichung wieder vor.

$$\cos.nx + \sin.nx\sqrt{-1} = (\cos.x + \sin.x\sqrt{-1})^n$$

in welcher man Statt sin. n x und cos. n x ihre Werte in die Reihe

$$nAx + n^2Bx^2 + n^3Cx^3 + n^4Dx^4 \text{ u. s. w.}$$

$$1 - \frac{n^2A^2x^2}{2} - ABx^3 \text{ u. s. w.}$$

setzen kann, und man entwickele auf diese Art die Potenzen der zweiten Hälfte. Man erhält also

$$1 + nAx\sqrt{-1} + n^2\left(B\sqrt{-1} - 1 - \frac{A^2}{2}\right)x^2 + n^3(C\sqrt{-1} - 1 - AB)x^3 + \text{u. s. w.}$$

$$= (\cos.x)^n\left[1 + n\frac{\sin.x}{\cos.x}\sqrt{-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{\sin.x}{\cos.x}\sqrt{-1} - 1\right)^2 + \text{u. s. w.}\right]^n$$

Konnte man nun nicht füglich gleich alle geraden Potenzen von x in der Reihe für den sin. x und alle ungeraden Potenzen von x in der Reihe für den cos. x als null und nichtig, wie dies der erste Blick auf die vorige No. verrät, weglassen, und gleich setzen

$$1 + Anx\sqrt{-1} - \frac{A^2}{2}n^2x^2 + n^3x^3C\sqrt{-1} -$$

$$-\left(AC + \frac{A^4}{8}\right)n^4x^4 + n^5x^5(E\sqrt{-1}) \text{ u. f. w.}$$

$$= (\cos.x)^n\left[1 + n\frac{\sin.x}{\cos.x}\sqrt{-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\cdot\right.$$

$$\left.\left(\frac{\sin.x}{\cos.x}\sqrt{-1}\right)^2 + \text{u. f. w.}\right]''$$

Und hier, da man doch alles zu einer Funktion von tang. x machen wollte, konnte man da, $\cos.x = \frac{1}{\sqrt{(1+\text{tang}\,x^2)}}$ nicht gleich $(\cos.x)^n = (1 + \text{tang}.x^2)^{-\frac{n}{2}} = 1 - \frac{n}{2}\text{tang}.x^2 + \frac{n(n+2)}{2 \cdot 4}\text{tang}.x^4 - \frac{n(n+2)}{2 \cdot 4}\cdot\frac{(n+4)}{6}\text{tang}.x^6 + -$ u. f. w. fetzen und mit $1 + n$.

$$\text{tang}.x\sqrt{-1} + \frac{n(n-1)}{1 \quad 2}\text{tang}.x^2(\sqrt{-1})^2 -$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\text{tang}.x^3(\sqrt{-1})^3 + + \text{u. f. w.}$$

multipliziren? so erhielte man $1 + Anx\sqrt{-1} - \frac{A^2n^2x^2}{2} + n^3x^3C\sqrt{-1} - \left(AC + \frac{A^4}{8}\right)\cdot n^4x^4 + n^5x^5(E\sqrt{-1}) \text{ u. f. w.} = 1 + n\sqrt{-1}\cdot(\text{tang}.x - \frac{1}{3}\text{tang}.x^3 + \frac{1}{5}\text{tang}.x^5 - + \text{u. f. w.})$

$$- n^2\left[\frac{\text{tang}.x^2}{2} - \frac{\text{tang}.x^4}{3} \text{ u. f. w.}\right] - \frac{n^3}{6}\sqrt{-1}\cdot$$

$$(\text{tang}.x^3 - \text{tang}.x^5 \text{ u. f. w.}) + \frac{n^4}{2.3.4}[\text{tang}.x^4$$

$$\text{u. f. w.}] + \frac{n^5}{2.3.4.5}(\text{tang}.x^5 \text{ u. f. w.}) \text{ u. f. w.}, \text{ in-}$$

dem

dem man alles, was in derselben Potenz von n multiplizirt ist, zusammen ordnete. Jetzt alles auf eine Seite gebracht, würde die Gleichung $= 0$ und sich alles, was in einerlei Potenz der Größe n multiplizirt war, vernichten, dadurch fände man zu wiederholten Malen

$$x = \frac{1}{A}(\text{tang. } x - \tfrac{1}{3}\text{tang. } x^3 + \tfrac{1}{5}\text{tang. } x^5 - + \text{u. s. w.})$$

Allein man beliebt folgenden, ich weiß nicht, ob ächt wissenschaftlichen Rechnungs-Gang zu gehen.

"Nun ist $\frac{\text{sin. } x}{\text{cos. } x} = \text{tang. } x$ und $\text{cos. } x = \sqrt{(1 - \text{sin. } x^2)}$; also $(\text{cos. } x)^n = (1 - \text{sin. } x^2)^{\frac{n}{2}} = 1 - \frac{n}{2}\text{sin. } x^2 + \frac{n(n-2)}{2 \cdot 4}\text{sin. } x^4$ u. s. w. Substituirt man diese Werte, so wird sich die Größe nur noch in den Koeffizienten zeigen, und ordnet man die Sätze nach den Potenzen dieser Größe, so bekömmt die zweite Hälfte folgende Gestalt

$$1 + nP + n^2Q + \text{u. s. w.}$$

Um abzukürzen, mache man

$$P = \text{tang. } x\sqrt{-1} - \tfrac{1}{2}(\text{tang. } x\sqrt{-1})^2 + \tfrac{1}{3}(\text{tang. } x\sqrt{-1})^3 \text{ u. s. w.} - \tfrac{1}{2}\text{sin. } x^2 - \tfrac{1}{4}\text{sin. } x^4 - \tfrac{1}{6}\text{sin. } x^6 + \text{u. s. w.}$$

$$Q = \tfrac{1}{2}(\text{tang. } x\sqrt{-1})^2 + \text{u. s. w.}$$

Streicht man nun die Einheit in beiden Hälften weg, und dividirt die ganze Gleichung durch n, so sieht sie so aus:

$$Ax\sqrt{-1} + n\left(B\sqrt{-1} - \frac{A^2}{2}\right)x^2 + \text{u. s. w.} = P + nQ + \text{u. s. w.}$$

und da sie unabhängig von der Größe n, die unbestimmt bleibt, dieselbe bleiben soll, so müssen die Glieder, welche die verschiedenen Potenzen von n enthalten, sich von selbst vernichten; welches die Gleichung sogleich auf $Ax\sqrt{-1} = P$ bringt, indem man die Potenzen von $\sqrt{-1}$ entwickelt, [auch hier eine voreilige Weglassung und Vernichtung, die nach vollendeter Entwickelung von selbst Statt findet, wie wir oben bereits gesehen haben].

$A x \sqrt{-1} = (\text{tang.}\, x - \frac{1}{3}\text{tang.}\, x^3 + \frac{1}{5}\text{tang.}\, x^5 - +$ u. ſ. w.) $\sqrt{-1 + \frac{1}{2}\text{tang.}\, x^2 - \frac{1}{4}\text{tang.}\, x^4 + \frac{1}{6}}$. $\text{tang.}\, x^6 - +$ u. ſ. w. $- \frac{1}{2}\text{ſin.}\, x^2 - \frac{1}{4}\text{ſin.}\, x^4 - \frac{1}{6}\text{ſin.}\, x^6 +$ u. ſ. w.

Da man nun die WurzelGröße $\sqrt{-1}$ plus und minus annemen kann (?), ſo iſt ſichbar, daß, wenn man ſie nach einander poſitiv und negativ annimmt, und die beiden Gleichungen eine von der andern abzieht, man erhält, nachdem man durch $2A\sqrt{-1}$ dividirt hat:

$$x = \frac{1}{A}[\text{tang.}\, x - \tfrac{1}{3}\text{tang.}\, x^3 + \tfrac{1}{5}\text{tang.}\, x^5 - \text{u. ſ. w.}].$$

Wo iſt es aber hier nun beſtimmt bewießen worden, daß dieſe Reihe unendlich ſeün müſſe, ſie könnte ja irgendwo aufhören.

In N°. 28. will Lagrange bewießen haben, daß $A = 1$ ſeün müſſe.

Was ſich one alle FunktionenRechnung nach den erſten Regeln der allgemeinen Arithmetik (vom Addiren, Subtrahiren, Multipliziren, Dividiren, Potenziren und Ekſtrahiren) ergiebt, daß, weil $\text{ſin.}(x+i) = \text{ſin.}\, x.\text{cos.}\, i + \text{cos.}\, x.\text{ſin.}\, i$; $\text{cos.}(x+i) = \text{cos.}\, x.\text{cos.}\, i - \text{ſin.}\, x.$ $\text{ſin.}\, i$ und $\text{ſin.}\, i = i - \frac{i^3}{2.3} + \frac{i^5}{2.3.4.5} - +$ u. ſ. w.; $\text{cos.}\, i = 1 - \frac{i^2}{2} + \frac{i^4}{2.3.4} - \frac{i^6}{2.3.4.5.6}$ u. ſ. w. mithin $\text{ſin.}(x+i) = \text{ſin.}\, x + i.\text{cos.}\, x - \frac{i^2}{2}\text{ſin.}\, x - \frac{i^3}{2.3}\text{cos.}\, x + \frac{i^4}{2.3.4}\text{ſin.}\, x + \frac{i^5}{2.3.4.5}.$ $\text{cos.}\, x +$ u. ſ. w und $\text{cos.}(x+i) = \text{cos.}\, x + i.\text{ſin.}\, x - \frac{i^2}{2}\text{cos.}\, x - \frac{i^3}{2.3}\text{ſin.}\, x + \frac{i^4}{2.3.4}\text{cos.}\, x - \frac{i^5}{2.3.4.5}\text{ſin.}\, x +$ u. ſ. w. iſt; findet Lagrange mittelſt

telst seines versteckten FunktionenKalkuls in N°. 29, wo es jedem freisteht, dieses selbst nachzusehen, und wo er am Schlusse sagt: "welches, wenn man x = o setzt (— ?!?!), und hernach i in x verwandelt, dieselben Formeln giebt, die wir schon weiter oben fanden" (— ?!) Und dies ist es, was Lagrange und Ausländer in der Theorie der trigonometrischen Linien mer geleistet haben als Wernesburg. Von den Entwickelungen und Formeln aber, was W. in der andern Hälfte seiner Schrift geleistet hat, sind auch die verschwindenden Spuren in der Lagrange'schen nicht anzutreffen.

Doch was braucht es noch viele Worte über einen Kalkul, von dem der Urheber Lagrange in N°. 9 u. 84 seiner Schrift selbst sagt: "daß der Kalkul der Funktionen mit der eigentlichen Differenzial- und IntegralRechnung einerlei seŭ, und dadurch die Prinzipien und die von ihr bekannten Regeln unabhängig von aller Erdichtung und Metaphŭsik (?) bewiesen würden."

"Man kann dasjenige Verfaren, durch welches man die abgeleiteten Funktionen und Gleichungen findet, direkte Analŭsis (der Funktionen) nennen, weil es in der That nur auf direkte Methoden gegründet ist, und nur Operationen gebraucht, welche man durch die Regeln, welche wir auseinandergesetzt haben, immer ausführen kann. Aber die Art, um von diesen Funktionen und Gleichungen zu denen zurückzukommen, von welchen sie abgeleitet werden können, und die man als ihre ursprünglichen ansehen kann, machet einen andern Theil der Analŭsis der Funktionen aus; welchen man die umgekerte Analŭsis nennen kann, weil sie von denselben Methoden und Regeln abhängt, aber umgekert genommen, und welche sich nicht immer mit derselben Leichtigkeit und Erfolg anwenden lassen. —" "Da unsere Absicht nicht ist, eine vollständige Abhandlung davon zu geben, so wollen wir hier weiter keine Details beifügen; aber diejenigen, welche den DifferenzialKalkul verstehen, können nicht felen, die Gleichförmigkeit der Analŭsis der Funktionen, mit diesem Kalkul, und die Uebereinstimmung der direkten und umgekerten Analŭsis (der Funktionen), mit den beiden Theilen dieses Kalkuls, welche man Differenzial- und IntegralKalkul nennt,

(der

(der direkten und umgekerten ersten, zweiten, dritten u. s. w. Funktionen mit den ersten, zweiten, dritten Differenzialen und Integralen,) zu bemerken. Also wird es ihnen leichte seün, wenn sie es für gut finden, die verschiedenen Methoden von Integrationen, so bis jetzt gefunden sind, zu den Funktionen überzutragen. Wir werden weiter unten auf eine direkte und strenge Art diese Gleichförmigkeit — — — — beweißen." — — — Was bedarf es also des Zeugnisses weiter!! — Des FunktionenKalkuls Karakter ist bestimmt. — Er läßt im Ableiten verschwinden und ergänzt wieder, wie jener auch, nur unter einer andern trügerischen blendendern Gestalt und einem verfürerischeren Gewande das Felervolle dem spähenden Geiste verhüllend, pralt mit Schärfe und Evidenz der Alten, wärend er Widersprüche und dergl. auf das feinste zu bedecken bemühet ist. —

Anmerkung. Bei der Korrektur dieser Abtheilung kömmt mir eben ein ser netter Gesang, eine Rezension in der Erzallg. Lit. Zeit. No. 235. 1804. von Karl Christian Langsdorfs, Prof. zu Erlangen, AnfangsGründe der reinen Elementar- und höhern Mathematik, auf Revision der bisherigen Prinzipien gegründet (2 Rthlr. 12 Gr.) zu Gesichte.

Es ist äußerst poßirlich und zum krank Lachen, zu sehen, wie kurz einige Blätter zuvor die Philosophie, welche vom Absoluten ausgehet und es sattsam darthut, daß dieses Absolute Alles und Eins, AllEins, keineswegs das Nichts, sondern das erste Eine Etwas und alles andere sonst nichts und nur in Bezug auf dies erst Etwas ist, wie diese Philosophie für eine Philosophie, die aus Nichts oder Null Etwas schaffe, astrologisch ausgedeutet wird; — und gegentheils nur einige Blätter weiter, wie Rez. gleich abgerichteten Vögeln, der eigentlichen Schöpfung von Etwas aus Nichts in der Mathematik, der zeitherigen höhern Analüsis, dieser NullenRechnung vermeintliche ErenRettung, als den Einen erlernten Gesang hundert und aber hundert Mal wiedersingen und dabei allezeit am Ende ihren Meister zitiren. Man lese:

"L. sagt S. 378, die Betrachtung unendlich kleiner Größen füre allemal unvermeidlich entweder auf eine NullenRechnung, der alle Evidenz felt, und die des Namens einer zur reinen Mathematik gehörigen Wissenschaft ganz unwürdig ist, oder sie füre auf eine bloße NäherungsRechnung. — Allein keines von beiden will die Rechnung des Unendlichen. In dem Verhältnisse der endlichen Veränderungen zusammengehöriger Größen liegt noch ein, durch die Relation dieser Größen allein völlig bestimmbares Verhältnis gleichsam eingewickelt, woraus ein durch die Veränderungen besonders modifizirtes hervorgeht. Man

wird

wird dieses am deutlichsten einsehen, wenn man den Anfang der Theorie des Fonktions analytiques von La Grange zur Hand nimmt."

O ja wol! ungemein deutlich sieht man aus dieser Schrift, fast auf jedem Blatt, welches herrliches, besonders modifizirtes Verhältnis es seŭ, das aus den beliebten Veränderungen hervorgeht, es ist jenes mächtige Nullen Verhältnis, dieser mächtige ZauberKreis mit seinen Potenzen z. B. §. 85. der Theor. d. Fonctions anal.

Anm. 2. Es bleibt immer gleich verwerflich, irgend ein Glied der entwickelten, zweitheilig gesetzten, Größe von gewisser Potenz für die ganze Summe oder Differenz qua 1. oder 2. u. dgl. Differenzial derselben ersten Größe zu setzen, welches das Verfaren des Differenziirens ausmacht; ja wol; gar Koeffizient und Potenz des, größer angenommenen Theils unter dem Zeichen f(x), f''(x). f''(x) u. s. w. auszudrücken und sie erste, zweite und dritte Funktion zu nennen: nachmals umgekert statt des einen angenommenen Gliedes die Summe der ganzen Reihe, in einer eintheiligen Größe verwandelt, zu setzen und zwar nach ein bischen scheinbar geregelter Willkür, worin das Verfaren der Integration bestehet, welches auch das Finden der frühern Funktionen aus der nächstfolgenden, wie man beliebte, genannt ward.

Es ist hier keineswegs der Ort und Platz dazu, die Widersprüche und Feler dieser FunktionenRechnung durch Verfolgung des so fein gesponnenen Resonnements und RechnungsGanges in allen SchlupfWinkeln vom Anfange bis zu Ende alle auszuspähen und den Mangel der unerläßlichen Schärfe und Evidenz bei aller anscheinenden Schärfe und Evidenz überall von Nummer zum Nummer aufzudekken; mit einem Worte die FunktionenRechnung in ihrer ganzen Blöße darzulegen. — Wir müßten eine Korpulenz von Kommentar darüber ausarbeiten. —

Die Prinzipien des sogenannten Addirens, Subtrahirens, Multiplizirens, Dividirens, (des Kombinirens,) Potenzirens und Ekstrahirens und die daher sich ergebenden allgemeinen Ausdrücke und Bi-, Tri-, Quatri- bis PolünomialFormeln bei ganzen und gebrochenen Exponenten in ihrer höchsten Allgemeinheit und Absolutheit, scharf aufgefaßt in einer UrrechnenLere (und diese UrrechnenLere auf die Raum- und BewegungsLere angewandt) oder eine in ihre letzten Gränzen erweiterte Algebra angewandt auf alles; — diese sind hinlänglich um

die

die verwickeltsten Aufgaben der höchsten reinen und angewandten Analüsis mit der größten Kürze, Evidenz, Nettigkeit und Einfachheit aufzulößen. —

Und hierin möchte es auch der rechte Ort seün, an jenen FunktionenRechnungen, an jenen Differenzial- und IntegralRechnungen als Beispiele zu zeigen, wie man etwa nicht mathematisiren soll.

In harten Zügen wurden die Gebrechen dieser sogenannten Analüsis des Unendlichen herauf gefurcht. Der Ackersmann furchet auch tief, wenn er seinen Boden von Unkraut reinigen und edle Körner zur Erndte und künftigen Frucht einstreuen will; vom leise gefurchten Acker füret der Wind den guten Saamen hinweg, die kommende Erndte ist traurig, der vorübergehende Fremdling hält dann den Boden für unbrauchbar für die Welt. —

Der werfe den ersten Stein auf mich, der, von der Warheit ganz durchdrungen, mitten im Kampfe im wissenschaftlichen Kriege, wenns auf Entscheidung ankommt, nicht auch des schweren Geschützes sich bedient. —

Die

Die einst eingesandte

Auflösung eines Problems

(aus der unbestimmten geometrischen Analysis,)

von

Don Augustin de Pedrayes,

königl. spanisch. Professor der Mathematik in Madrid,

aufgegeben.

Vierte Abtheilung des Ganzen.

Vorbericht.

Zur Beurtheilung meiner Kenntnisse, meiner Stärke in der Differenzial- und IntegralRechnung, meiner Mächtigkeit derselben versprach ich oben die von mir allein aus Teutschland über Berlin eingesandte Auflösung eines, von Don Augustin de Pedrayes, königl. spanisch. Prof. der Mathematik in Madrid, aufgegebenen Problems aus der unbestimmten geometrischen Analüsis hier anzufügen und mitzutheilen.

Die Einladung an die teutschen Mathematiker zur Auflösung des Problems stand unter andern im Allg. Lit. Anz. von 1797. No. CXLVIII. S. 1527-1528 und in andern Blättern, z. B. im Verkündiger Novemb. 1797. Sie mag hier unten folgen, weil sie zur richtigen Beurtheilung erforderlich ist. Das EinladungsProgramm selbst, das ich mir — mit vielem PortoKosten (Siehe unten: Einlad.) — vom Buchhändler Lagarde in Berlin kommen lies, ist zuerst in spanischer und dann auch in lateinischer Sprache abgefaßt zugleich abgedruckt; es ist nötig, daß ich solches hier in der letzten Sprache nach jener Einladung abdrucken lasse und dann unnötig, eine Uebersetzung davon in teutscher Sprache hier zu liefern, da die meisten Leser dieser Schrift onedem pflegen dieser Sprache kundig zu seün.

Dann folge meine Auflösung; ich gebe sie so vollständig, als es mir aus meinen unter meinen Papieren vorrätigen Entwürfen dazu noch jetzt möglich ist: denn leider — nam ich damals (meiner Sache zu gewis) von der mer ausgearbeiteten, mit dem holländ. Sümb. Een overmoeide

Arbeid

Arbeid komt alles te boven verſehenen Abhandlung, die im Oktober 1798 an Pedrayes und zwar aus Patriotismus in teutſcher Sprache abgefaßt, laut Vorſchrift an den königl. preuſſ. Direktor Merian in Berlin mit der Poſt abging, leider wiederhole ich, keine beſondere genaue Abſchrift. — Dieſerwegen wird es mir unter andern unmöglich ſeün, den, wie in der Folge zu erſehen, direkten Beweis, daß in der Gleichung für dY, $x = r^{-2}\varphi^{-1}$ und dagegen $u = r^{4}\varphi$ oder umgekert $x = r^{4}\varphi$ und $u = r^{-2}\varphi^{-1}$ ſeün müſſen und keine andern Funktionen aus dem veränderlichen φ und beſtändigen r ſeün können, wenn der Auflöſſung Genüge geſchehen ſollte, hier wieder zu geben; weil er mir verloren ging und ich gerade jetzt keine Zeit, ihn von Neuem aufzuſuchen habe. Sollte ich ihn von ſelbſt vollſtändig wiederfinden oder jene eingeſandte Abhandlung im Original oder in Abſchrift erhalten können, ſo kann ich ihn ja an einem ſchicklichen Orte immer nachholen.

Jedoch mag um der beſſern Vergleichung willen, der meinigen, eine zu bald ſer beſonderte Auflöſſung in einem vom würdigen Profeſſor Joh. Fried. Pfaff in Helmſtädt herrürenden und von ſeinem Bruder Wilh. Pfaff in Berlin im Allg. Lit. Anzeiger mitgetheilten "Verſuche „einer Erklärung der bisher nach Sinn und Möglichkeit „der Auflöſſung rätſelhaften Aufgabe dieſes ſpani„ſchen Gelerten" vorangehen.

Im Allg. Litt. Anzeiger 1797. No. CXLVIII. S. 1527—1228. und im Verkündiger Nov. 1797.

Einladung.

Don Auguſtin von Pedrayes, Profeſſor der Mathematik zu Madrid, ladet die teutſchen Gelerten ein, ſich mit der Auflöſſung einer von ihm vorgeſchlagenen Aufgabe aus der IntegralRechnung zu beſchäftigen. Er glaubt im Beſitz einer Methode zu ſeün, welche nicht nur bei dieſer Aufgabe, ſondern auch bei mereren andern von änlicher Art brauchbar iſt. Er iſt überzeugt, daß die Beantwortung ſeiner Frage zu vielen wichtigen Anwendungen Anlaß geben kann. Er wünſcht zu erfaren, welches die Gedanken und Hülfsmittel der Mathematiker in Betrachtung dieſes Gegenſtandes ſeün mögen. Der König von Spanien,

der

der die Fortschritte der Wissenschaften auf alle mögliche Weise zu befördern sucht, hat seinem Gesandten in Berlin, Hrn. Marquis von Musquiz, den Auftrag gegeben, einen Preis von funfzig Friedrichsd'or für denjenigen auszusetzen, der, nach Herrn von Pedrayes eigenem Urtheile, die erwänte Augabe aufgelößt haben wird. Es ist solche in einem eigenen spanischen und lateinischen Programm vollständig vorgetragen und erklärt, wovon die Eksemplare der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin übergeben worden sind.

Ein jeder, der sich mit dieser Aufgabe beschäftigen will, kann sich an den Herrn Buchhändler Lagarde wenden, um ein Eksemplar des Programms zu erhalten, und wird es in den meisten Fällen postfrei bekommen. Die Abhandlungen werden an den Herrn Direktor Merian, beständigem Sekretair der Akademie, eingesandt, welcher solche sammlen, und dem Herrn von Pedrayes überliefern wird. Sie werden aber nur bis zum 1. November 1798. angenommen, und müssen, wie gewönlich, mit einem Walspruche und auch einem versiegelten Zettel, auf welchem der nämliche Walspruch, und in welchem der Name des Verfassers befindlich ist, versehen seüen.

PROGRAMMA.

Quid sciri in animo sit, hoc programmate declaratur: nimirum utrum ex methodis ab inventione calculi differentialis hucusque notis deduci possit sequentis problematis solutio. Denuo utrum Geometra quisque investigationibus hujusce naturae incumbens, problemata similia solverit erueritque theoremata ad Geometriam sublimiorem promovendam conducentia. Deprehensa enim XVI ab hinc annis methodo qua non solum hoc problema solvitur, sed et alia ejusdem generis fere infinita quae proponi possunt, hujus methodi Auctor susceptum assecutus consilium, quod nec purae curiositatis seu vanae ingenii ostentationis specimen exhibet, ex nullis scriptis mathematicis quae perlustrare licuit principium inventionis hausit, sed haec circumstantia cum sufficiens haud sit ad legitimam super ejus novitate sententiam ferendam, solutio siqua detur verum judicium ostendet: eandem insistentes viam clarissimi Newtonus ac Leibnitzius demonstrarunt, primos fuisse inventores calculi differentialis seu

me-

methodi fluxionum, nec ad problemata hac ipsa epocha proposita facilis erat aditus nisi ope hujus calculi.

Methodos mathematicas, quae et ut fontes inventionum aestimari possunt, ex singularium problematum solutione saepius derivari, satis compertum est omnibus in scientiis mathematicis versatis. Problemata isoperimetrica calculo variationum originem et progressionem dedere; plurimaeque extant methodi in Geometria superiori familiares, quae ex solutione problematum particularium ortae, postmodum devenere methodi generales: quod et in aliis planum fiet, si ipsa adinventa sedulo examine perpendantur.

Nec suspicari licet, mentem Auctoris esse Mathematicorum ingenia, quorum illustria nomina obsequio prosequitur, in solutione problematis torquere et fatigare; quin immo ab hac vanitatis labe immunis non mirum dicet, si, quemadmodum ipse, alii etiam ad eandem solutionem analysi ipsa aut sublimiori pervenerint. Seriem combinationum quae methodum conficiunt in operibus mathematicis se non inveniisse, ut verissimum Auctor affirmat, et adjungit ipsam esse certa lege comprehensam, nec in solutione problematum ultra certum terminum progredi licere, ut, et si generalis, tanquam limitibus circumscripta methodus habenda sit.

Eandem vero seriem aut aliam in nullis scriptis mathematicis contineri asserero non audet. Quaecumque ergo sit series illa combinationum solutioni problematis conditionibusque praescribendis satisfaciens, si ante propositionem in Auctore aliquo indicetur, plene demonstrabitur methodum esse etiam ab alio detectam.

Unde et consequens est, ut Auctoris, qui indicetur mentem, si cum proposito quaerentis conveniat, fas sit comperire. Cum enim tam in hujus problematis quam in aliorum simpliciorum solutione applicationes et theoremata eliciantur Geometris, suo quidem judicio, non improbanda; hoc tantum fine ducitur, "ut sciens quae in „hac materia sunt inventa, methodum cum applicationi„bus, si id concessum fuerit, sapientum judicio submit„tat; sicque merito inventionis praefixo, ab aliis, quo „ipse non potuit, perducatur." Sub hoc aspectu, omnique sublata occasione invidiae, praesens negotium ad universos spectat.

PRO-

PROBLEMA.

Invenire aequationem integralem respondentem huic differentiali — — — —

$$\frac{ar^2\,dx}{\sqrt{[(r-x).x]}} + \frac{br^2\,dx}{\sqrt{[(4r-x).x]}} + \frac{cr^2\,du}{\sqrt{[(r-u).u]}}$$
$$+ \frac{er^2\,du}{\sqrt{[(4r-u).u]}} + \frac{frdx\sqrt{[4r^2-rx]}}{\sqrt{[(r-x).x]}}$$
$$+ \frac{hrdx\sqrt{[r^2-rx]}}{\sqrt{[(4r-x).x]}} + \frac{krdu\sqrt{[4r^2-ru]}}{\sqrt{[(r-u).u]}}$$
$$+ \frac{grdu\sqrt{[r^2-ru]}}{\sqrt{[(4r-u).u]}} + \frac{lrdx\sqrt{[4r-u]}}{\sqrt{x}}$$
$$+ \frac{mrdu\sqrt{[4r-x]}}{\sqrt{u}} + \frac{nrdx\sqrt{[r-u]}}{\sqrt{x}}$$
$$+ \frac{prdu\sqrt{[r-x]}}{\sqrt{u}} + \frac{qrdx\sqrt{[(4r-u).(r-u)]}}{\sqrt{[rx]}}$$
$$+ \frac{srdu\sqrt{[(4r-x).(r-x)]}}{\sqrt{[ru]}} + \frac{trudx}{\sqrt{[rx]}}$$
$$+ \frac{zrxdu}{\sqrt{[ru]}} = dY.$$

Animadversiones de problematis solutione.

1ª. (r) est recta constans et invariabilis; (x), (u) sunt rectae variabiles; (Y) est etiam quantitas variabilis.

2ª. Sit (φ) alia recta variabilis et $F(\varphi)$, $F'(\varphi)$ functiones algebraicae et rationales ejusdem variabilis (φ) cum constante (r) combinatae: ex conditione in solutione problematis servanda erit $x = F(\varphi)$, $u = F'(\varphi)$.

Functiones istae ut quantitates incognitae haberi debent, atque inter omnes functiones variabilis (φ) cum constante (r) combinatae illae tantummodo exhibebunt valores (x) et (u) per quas solutio problematis obtineatur.

Ex functionibus $F(\varphi)$ $F'(\varphi)$ deducetur valor ipsius $Y = F''(\varphi)$, quae functio est etiam algebraica, sed involvens partem rationalem cum quantitate radicali.

3ª. Ulterius exigitur aequatio numero terminorum finita inter rectas variabiles (x) (u) et constantem (r) qua ratio istarum rectarum determinetur.

Ex expositis itaque consequitur quaestionem his terminis etiam posse proponi: *si rectae variabiles* (x) (u) *per functiones algebraicas et rationales alterius variabilis* (φ) *cum constanti* (r) *combinatae designentur, illas invenire quae solutioni problematis satisfaciant.*

4ª. Factores (a) (b) &c. (t) (z) terminorum sunt numeri constantes determinati, eorumque valores ex solutione problematis habentur.

5ª. Termini integrales respondentes terminis aequationis differentialis praefatae idem habent originis punctum ex quo initium incrementorum computari debet, ut evanescente (x) omnes hi termini evanescant atque etiam variabiles (u) (Y): posita ergo hac aequatione differentiali $ardA + brdB + crdC + erdE + frdF + hrdH + krdK + grdG + ldL + mdM + ndN + pdP + qdQ + sdS + tdT + zdZ = dY$ identica aequationi problematis, ejusdem integralis $arA + brB + crC + erE + frF + hrH + krK + grG + lL + mM + nN + pP + qQ + sS + tT + zZ = Y$ consequitur omnes valores veros possibiles inter limites $x = 0$ $x = r$ et inter limites $u = 0$ $u = r$. Cum $x = 0$ aut $u = 0$, $arA + brB$ &c. $+ tT + zZ = Y = 0$; et quando $x = r$ aut $u = r$ terminus quisque *valorem* sortitur *determinatum*.

6ª. Termini $arA = ar^2 \int \frac{dx}{\sqrt{[(r-x).x]}}$;

$brB = br^2 \int \frac{dx}{\sqrt{[(4r-x).x]}}$, $crC = cr^2 \int \frac{du}{\sqrt{[(r-u).u]}}$, $erE = er^2 \int \frac{du}{\sqrt{[(4r-u).u]}}$

referunt sectores ejusdem circuli ejusdemque radii $= r$, discrimenque eorum petitur ex arcu tantum quisque

sector

sector insistit. Ponantur arcus isti (*A*) (*B*) (*C*) (*E*): *ex* (tota?) *solutione problematis* eruentur valores factorum (*a*) (*b*) (*c*) (*e*) per quos termini multiplicantur.

7ª. Termini $frF = fr\int \frac{dx\sqrt{[4r^2 - rx]}}{\sqrt{[(r-x)].x}}$,

$krK = kr\int \frac{du\sqrt{[4r^2 - ru]}}{\sqrt{[(r-u).u]}}$ a rectificatione Elipsis (?) pendent, et si in primo termino repraesentetur per *F* recta arcui eliptico aequalis, in secundo autem per *K*: ex *ipsa solutione* eruentur factores (*f*) (*k*) arcus multiplicantes.

8ª. Sed termini $hrH = hr\int \frac{[dx\sqrt{r^2 - rx}]}{\sqrt{[(4r-x).x]}}$, ...

$grG = gr\int \frac{du\sqrt{[r^2 - ru]}}{\sqrt{[(4r-u).u]}}$ a rectificatione Hyperbolae (?) pendent insuper continentes integralem finitam. Sit in primo termino (*H*) et in secundo (*G*) recta ex arcu hyperbolico (?) et integrali finita procedens, *non absimili modo* factores (*h*) (*g*) deducentur.

*) 9ª. Termini sequentes arearum curvilinearum formam apte exhibent: sit $lL = lr\int \frac{dx\sqrt{[4r-u]}}{\sqrt{x}}$,

$nN = nr\int \frac{dx\sqrt{[r-u]}}{\sqrt{x}}$,

$qQ = qr\int \frac{dx\sqrt{[(4r-u).(r-u)]}}{\sqrt{[rx]}}$,

$tT = tr\int \frac{udx}{\sqrt{[rx]}}$: posita abscissa communi $= \sqrt{[rx]}$

facillime determinabitur coordinata orthogonalis in unoquoque termino: et si per (*L*) (*N*) (*Q*) (*T*) designantur areae, factores numerici (*l*) (*n*) (*q*) (*t*) *ut superius* eruentur.

Eadem

Eadem ut dicta intelligantur de terminis .....

$$mM = mr\int \frac{du\sqrt{[4r-x]}}{\sqrt{u}}, \quad pP = pr\int \frac{du\sqrt{[r-x]}}{\sqrt{u}},$$

$$sS = sr\int \frac{du\sqrt{[(4r-x).(r-x)]}}{\sqrt{[ru]}}, \quad zZ = zr\int \frac{x\,du}{\sqrt{[ru]}}$$

in quibus abſciſſa communis eſt $= \sqrt{[ru]}$.

10a. Ex differentialibus dA, dB &c. dT, dZ, nulla ſeorſum eſt integrabilis ſerie numero terminorum finita per methodos ſaltem quas calculus hucusque (?) demonſtratas ſuppeditat. Ex Typographia regia. Anno 1796.

Auguſtinus Pedrayes.

Ueber das Problem des Profeſſors der Mathematik, Don Auguſtin de Pedrayes in Madrid.

Dem mathematiſchen Publikum wird es, wie ich hoffe, nicht unangenem ſeün, folgenden Verſuch einer Erklärung der bisher, nach Sinn und Möglichkeit der Auflöſsung, rätſelhaften Aufgabe dieſes ſpaniſchen Gelerten zu leſen. Er iſt von meinem Bruder, dem Profeſſor Joh. Friedr. Pfaff in Helmſtädt, den ich vor Kurzem zufälliger Weiſe in einem Briefe um ſeine vollſtändige Meinung über dieſes Problem erſucht hatte. Wer das Programm des Prof. de Pedrayes nicht beſitzt, kann die Götting. gel. Anzeigen 1798, Stck. 37, S. 361-366, darüber nachleſen, wo ſich eine faſt wörtliche Ueberſetzung deſſelben befindet. Zur Auflöſsung des Problems kommt aber dort nicht das geringſte vor, noch wird ein Wink dazu gegeben: ſelbſt erhellt daraus nicht einmal, in welchem Sinne der Rezenſent (M. Friedr. Wilh. Aug. Murhard) das Problem genommen habe. Es iſt daher wol nur ein Mißverſtändniß, wenn irgendwo geſagt wird, daß Aſſeſſor Murhard bereits eine Auflöſsung des Problems in den Götting. gel. Anzeigen bekannt gemacht habe.

Fol-

Folgendes ist die Darstellung meines Bruders: "Man könnte kurz sagen, es seŭ ein Problem aus der unbestimmten höhern Analŭsis! Die Aufgabe des Pedrayes würde ich, wie ich sie mir wenigstens vorstelle, folgender Gestalt ausdrücken:

Das algebraische Verhalten zwischen den beiden veränderlichen Größen x und u zu finden, bei welchem für gewisse auch zu bestimmende Werte der Koeffizienten a, b, c, e, f, h, k, g, l, m, n, p, q, s, t, z, das Integral y des nachfolgenden zusammengesetzten DifferenzialAusdrucks sich algebraisch angeben lasse:

$$\frac{a\,dx}{\sqrt{(1-x)x}} + \frac{b\,dx}{\sqrt{(4-x)x}} + \frac{c\,du}{\sqrt{(1-u)u}} + \frac{e\,du}{\sqrt{(4-u)u}}$$
$$+ \frac{f\,dx\sqrt{4-x}}{\sqrt{(1-x)x}} + \frac{h\,dx\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(4-x)x}} + \frac{k\,du\sqrt{4-u}}{\sqrt{(1-u)u}}$$
$$+ \frac{g\,du\sqrt{1-u}}{\sqrt{(4-u)u}} + \frac{l\,dx\sqrt{4-u}}{\sqrt{x}} + \frac{m\,du\sqrt{4-x}}{\sqrt{u}}$$
$$+ \frac{n\,dx\sqrt{1-u}}{\sqrt{x}} + \frac{p\,du\sqrt{1-x}}{\sqrt{u}} + \frac{q\,dx\sqrt{(4-u)(1-u)}}{\sqrt{x}}$$
$$+ \frac{5\,du\sqrt{(4-x)(1-x)}}{\sqrt{u}} + \frac{tu\,dx}{\sqrt{x}} + \frac{z\,x\,du}{\sqrt{u}} = dy$$

Für r im Original ist hier 1 gesetzt, unbeschadet der Allgemeinheit, die Gleichung einfacher wird.

Die Worte des Spaniers:

"*Invenire aequationem differentialem* (? integralem) *respondentem huic differentiali:*"

$$\text{“}\frac{a\,r\,dx}{\sqrt{(r-x)x}} + \ldots + \frac{z\,r\,x\,du}{\sqrt{u}} = dy\text{”}$$

sind freilich ser dunkel (?), und geben eigentlich nach der gewönlichen Auslegung keinen waren Sinn. Daß aber die vorausgesetzte Erklärung den Gedanken des Verfassers gemäß seŭ, scheint mir aus den beigefügten "*Animadversiones de problematis Solutione*" zu erhellen.

Er verlangt, daß x und u durch algebraische und rationelle Funktionen einer dritten veränderlichen Größe Φ ausgedrückt werden, und (welches schon aus jenem folgt) daß eine endliche Gleichung zwischen x und u angegeben

werde,

werde, daraus werde (eigentlich soll, denn es scheint mir die HauptBedingung des Problems zu seün) für y eine auch algebraische obgleich rationelle Funktion von Φ hergeleitet werden. Von den Koeffizienten a, b, . . . t, z, heißt es, sie seüen numeri constantes determinati, eorumque valores ex solutione problematis habentur. Bei näherer Betrachtung des zusammengesetzten DifferenzialAusdrucks zeigt sich, wie Pedrayes selbst bemerkt, daß die Integration des 1., 2., 3., 4. Theils von der Quadratur des Kreises, des 5. und 6. von der Rektifikation der Ellipse, des 7. und 8. von der Rektifikation der Hüperbel abhängt. Die übrigen Theile können angesehen werden als Differenziale von Flächen krummer Linien, deren Beschaffenheit sich nach dem Verhalten zwischen u und x richtet. Es kommt nun eigentlich, wie ich glaube, bei der Aufgabe darauf an, u und x durch einander, oder durch eine dritte Größe so zu bestimmen, daß, obgleich die einzelnen IntegralTheile transzendent sind, doch das gesammte Integral algebraisch werde. Dies wird aber nicht bei allen Werten von a, b, c, . . . z dienlich seün, daher müssen noch ferner die Werte dieser Konstanten bestimmt werden, bei welchen es angeht.

Transzendente Größen in eine algebraische Summe oder Differenz zu bringen, ist auch schon bei andern Gelegenheiten versucht worden. So läßt sich in der Parabel, Ellipse und Hüperbel zu einem Bogen ein anderer angeben, daß beider Unterschied algebraisch wird. Euler hat hierüber merere Untersuchungen angestellt (Nov. Comment. Petrop. Tom. VI, VII, XII. Acta Petrop. Tom. II, P. I. Tom. V. P. II.). Gewisser Maßen gehört hierher auch die Betrachtung der Monde zwischen krummen Linien.

Was nun die Auflößung der Aufgabe in dem vorerwänten Sinne betrifft, so läßt sich eine ser einfache Art angeben, ihren Bedingungen Genüge zu thun. Man setze nämlich beide veränderliche Größen einander gleich; $u = x = \Phi$ (das einfachste Verhalten zwischen beiden), und neme zwischen den beständigen Koeffizienten folgende 4 Gleichungen an:

$$1)\ n + p = -2(a + c); \quad 2)\ l + m = -\frac{b + e}{2};$$

$$3)\ q + s = -3(f + k); \quad 4)\ h + g = 4(f + k),$$

so sind zwar die einzelnen IntegralTheile (bis auf die beiden letz-

letzten) transzendent, ihre Summe aber, oder das Integral des zusammengesetzten DifferenzialAusdrucks ist algebraisch; nämlich

$$y = (n+p)\sqrt{x}(1-x+(1+m)\sqrt{x}(4-x) - 2(f+x)\sqrt{x}(1-x(4-x)+\tfrac{2}{5}(t+x).x^{\frac{3}{2}}$$

Die Rechnungen, wodurch dieses Resultat gefunden ist, herzusetzen, wäre zu umständlich: die Probe über ihre Richtigkeit läßt sich leicht anstellen. Daß dadurch die Forderungen der Aufgabe erfüllt werden, leidet wol keinen Zweifel. In einer Rücksicht wird selbst noch mer dadurch geleistet. Nämlich die Koeffizienten a, b, c . . z brauchen keine bestimmten Werte zu haben. Zwei davon, t, z, bleiben ganz unbestimmt, und für die übrigen 14 sind nur 4 Gleichungen erforderlich.

Ein besonderer Fall dieser Auflößung ergiebt sich, wenn man die 4 Summen (1) (2) (3) (4) $= 0$ setzt. Das würde aber keine Auflößung seün, weil die Schwierigkeit, die gehoben werden sollte, hier nur umgangen wird; die transzendenten Theile heben sich nämlich alsdenn schon in dem gegebenen DifferenzialAusdruck, vor aller Reduktion, je zwei und zwei gegenseitig auf.

Uebrigens gestehe ich gern, daß auch obige Auflößung keinen waren Wert hat, so wie die Aufgabe selbst keinen haben würde, wenn sich nicht eine vollkommenere und allgemeine Auflößung geben ließe; welche vermutlich verwikkeltere Reduktionen und Transformationen von Differenzialformeln theils veranlassen, theils voraussetzen würde. Doch scheint mir durch das bisherige wenigstens der Sinn der Aufgabe deutlich gemacht, und die Möglichkeit der Auflößung durch eine wirkliche Probe gezeigt zu seün."

Berlin, am 12. Novbr. 1798. Wilhelm Pfaff.

Meine Auflößung des Problems.

Ich mittheile sie in der SchlußFolge hier, wie ich zu ihr durch Betrachtung des aufgegebenen Differenzials gelangte, gerade die umgekerte Ordnung und Folge der AuflößungsArten von der in der eingesandten Abhandlung.

Im Jahr 1798 glaubte ich, daß durch diese Art der Auflößung oder Integrirung sattsam bewießen und erkenntlich seü, daß kein einziges anderes Integral nach allen

fest-

festgesetzten und jedermann bekannten Regeln dieser Rechnungs-Methode jenem aufgegebenen Differenziale entsprechen könnte.

In änderte die obige Ordnung der Sätze in die folgende um:

$$dY = lrdx(4r-u)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + nrdx(r-u)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + qr^{\frac{1}{2}}dx(4r-u)^{\frac{1}{2}}(r-u)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + mrdu(r-x)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}} + prdu(r-x)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}} + sr^{\frac{1}{2}}du(4r-x)^{\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}} + tr^{\frac{1}{2}}ux^{-\frac{1}{2}}dx + zr^{\frac{1}{2}}xu^{-\frac{1}{2}}du + ar^2(rx-x)^{-\frac{1}{2}}dx + br^2(4rx-x)^{-\frac{1}{2}}dx + frdx(4r^2-rx)^{\frac{1}{2}}(rx-x^2)^{-\frac{1}{2}} + hrdx(r^2-rx)^{\frac{1}{2}}.(4rx-x^2)^{-\frac{1}{2}} + cr^2du(ru-u^2)^{-\frac{1}{2}} + er^2du.(4ru-u^2)^{-\frac{1}{2}} + krdu(4r^2-ru)^{\frac{1}{2}}(ru-u^2)^{-\frac{1}{2}} + grdu(r^2-ru)^{\frac{1}{2}}(4ru-u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Dieses Differenziale betrachte man als blos aus den acht ersten und sogleich folgenden Sätzen bestehend die übrigen acht Sätze sind vor der Hand als nicht da befindlich oder als beständige Größen anzusehen. Dann wäre

$$dY = lrdx(4r-u)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + nrdx(r-u)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}} + qr^{\frac{1}{2}}dx(4r-u)^{\frac{1}{2}}(r-u)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + mrdu.(r-x)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}} + prdu(r-x)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}} + sr^{\frac{1}{2}}du.(4r-x)^{\frac{1}{2}}(r-u)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}} + tr^{\frac{1}{2}}ux^{-\frac{1}{2}}dx + zr^{\frac{1}{2}}.x\,u^{\frac{1}{2}}du + dP + dQ;$$

wo hier dP und dQ das felende bedeutet. Man integrire nun nach den bekannten Leren, so erhält man folgendes Integral

$$Y = 2lrx^{\frac{1}{2}}(4r-u)^{\frac{1}{2}} + 2nrx^{\frac{1}{2}}(r-u)^{\frac{1}{2}} + 2q.(rx)^{\frac{1}{2}}(4r-u)^{\frac{1}{2}}(r-u)^{\frac{1}{2}} - 2tu(rx)^{\frac{1}{2}} + P + 2mru^{\frac{1}{2}}.(4r-x)^{\frac{1}{2}} + 2pru^{\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}} + 2s(ru)^{\frac{1}{2}}(4r-x)^{\frac{1}{2}}.(r-x)^{\frac{1}{2}} - 2zx(ru)^{\frac{1}{2}} + Q.$$

Man sehe sowol x als u als veränderlich an und differenziire von Neuem erst das eine, dann das andere in demselben Gliede, so erhält man folgendes Differenzial

dY

$$dY = lr\,dx(4r-u)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + nr\,dx(r-u)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}$$
$$+ qr^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}(4r-u)^{\frac{1}{2}}(r-u)^{\frac{1}{2}}dx - tur^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx$$
$$+ mr(4r-x)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du + pr(r-x)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du$$
$$+ sr^{\frac{1}{2}}(4r-x)^{\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du - zxr^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du$$
$$- lrx^{\frac{1}{2}}(4r-u)^{-\frac{1}{2}}du - nrx^{\frac{1}{2}}(r-u)^{-\frac{1}{2}}du$$
$$- q(rx)^{\frac{1}{2}}(4r-u)^{\frac{1}{2}}(r-u)^{-\frac{1}{2}}du - q(rx)^{\frac{1}{2}}.$$
$$(r-u)^{\frac{1}{2}}(4r-u)^{-\frac{1}{2}}du - 2t(rx)^{\frac{1}{2}}du - mru^{\frac{1}{2}}.$$
$$(4r-x)^{-\frac{1}{2}}dx - pru^{\frac{1}{2}}(r-x)^{-\frac{1}{2}}dx - s(ru)^{\frac{1}{2}}.$$
$$(4r-x)^{\frac{1}{2}}(r-x)^{-\frac{1}{2}}dx - s(ru)^{\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}}(4r-x)^{-\frac{1}{2}}.$$
$$dx - 2z(ru)^{\frac{1}{2}}dx.$$

Vergleichet man nun dieses Differenzial mit dem aufgegebenen und besonders die sechs ersten positiven Glieder hier mit jenen sechs ersten, so entsprechen sie einander genau; von den übrigen negativen Gliedern, welche hier $x^{\frac{1}{2}}$ zum Faktor haben, mit denjenigen in jener Gl., welche $u^{-\frac{1}{2}}$, und die hier mit dem Faktor $u^{\frac{1}{2}}$ mit jenen in jener Gl. mit den Faktor $x^{-\frac{1}{2}}$; so ergiebt sich aus der ganzen Vergleichung, daß, wenn Auflößung würklich statt finden solle, $x^{\frac{1}{2}} = ru^{-\frac{1}{2}}$ oder umgekert $u^{\frac{1}{2}} = rx^{-\frac{1}{2}}$ und aus den vier letzten Gliedern, dies eben so vorzüglich so wie auch daß $du = -\frac{u}{x}dx$ und $dx = -\frac{x}{u}du$ seün müsse; ferner daß dann auch in der angegebenen Gleichung $+e = -l$, $c = -n$, $k = g = -q$, $b = -m$, $a = -p$, $f = h = -s$ und $dP = o$, und $dQ = o$ also auch $\int dP = P = o$ und $\int dQ = Q = o$.

Denn setzt man nun würklich $x^{\frac{1}{2}} = ru^{-\frac{1}{2}}$ in das neunte, zente, ölfte und zwölfte Glied, ferner $u^{\frac{1}{2}} = rx^{-\frac{1}{2}}$ in das vierzente, funfzente, sechzente und siebzente Glied, so erhält man

$$dY = lrx^{-\frac{1}{2}}(4r-u)^{-\frac{1}{2}}dx + nr(r-u)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx$$
$$+ qr^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx(4r-u)^{\frac{1}{2}}(r-u)^{\frac{1}{2}} + tur^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx + mr.$$

(4r

$(4r-x)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du + pr(r-x)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du + sr^{\frac{1}{2}}.$
$(4r-x)^{\frac{1}{2}}(r-u)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}du + zxr^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du - lr^2.$
$du(4ru-u^2)^{-\frac{1}{2}} - nr^2du(ru-u^2)^{-\frac{1}{2}} - qrdu.$
$(4r^2-ru)^{\frac{1}{2}}(ru-u^2)^{-\frac{1}{2}} - qrdu(r^2-ru)^{\frac{1}{2}}.$
$(4ru-u^2)^{\frac{1}{2}} - mr^2dx(4rx-x^2)^{-\frac{1}{2}} - pr^2dx.$
$(4rx-x^2)^{-\frac{1}{2}} - srdx(4r^2-rx)^{\frac{1}{2}}(rx-x^2)^{-\frac{1}{2}}$
$- srdx(r^2-rx)^{\frac{1}{2}}(4rx-x^2)^{-\frac{1}{2}} + dP + dQ.$

Jetzt nun noch $+e = -l$, $+c = -n$, $k = g = -q$, $b = -m$, $a = -p$, $f = h = -s$ und $dP = o$, $dQ = o$ so ist ganz das aufgegebene Differenzial wieder da.

Wänt man etwa, es ließe sich in den zum Integriren aufgestellten Differenziale jedes einzelne Glied besonders für sich selbst, etwa durch eine endliche Reihe Sätze integriren oder das ihm ganz entsprechende Integral aufstellen, so irrt man sich. Ich werde diesen Irrthum sogleich darzustellen suchen. Jedermann wird beim ersten Unblicke glauben, daß von folgenden acht Differenzialen

$ldL = lrdx\,x^{-\frac{1}{2}}(4r-u)^{\frac{1}{2}}$, $mdM = mr(4r-x)^{\frac{1}{2}}.$
$u^{-\frac{1}{2}}du$
$ndN = nr(r-u)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx$, $pdP = pr(r-x)^{\frac{1}{2}}.$
$u^{-\frac{1}{2}}du$
$qdQ = qr^{\frac{1}{2}}(4r-u)^{\frac{1}{2}}(r-u)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}$, $sdS = sr^{\frac{1}{2}}.$
$(4r-x)^{\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du$
$tdT = tr^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}udx$, $zdZ = zr^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}xdu$

die nachstehenden Integrale völlig genügten

$lL = 2lr(4rx-ux)^{\frac{1}{2}}$, $mM = 2mr(4ru-ux)^{\frac{1}{2}}$
$nN = 2nr(rx-ux)^{\frac{1}{2}}$, $pP = 2pr(ru-ux)^{\frac{1}{2}}$
$qQ = 2q(rx)^{\frac{1}{2}}(4r-u)^{\frac{1}{2}}(r-u)^{\frac{1}{2}}$, $sS = 2s.$
$(4r^2-rx)^{\frac{1}{2}}(ru-ux)^{\frac{1}{2}}$
$tT = 2tu(rx)^{\frac{1}{2}}$, $zZ = 2zx(ru)^{\frac{1}{2}}$

Allein

Allein wenn man sowol u als x wie veränderliche Grösen in jedem Gliede betrachtet und betrachten muß nach der Anname und nun ein jedes von diesen Integralen sowol in Rücksicht des x als auch des u differenziirt, so erhält man folgende richtige und vollkommene Differenziale

$$ldL = lr(4r-u)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx - lrx^{\frac{1}{2}}(4r-u)^{-\frac{1}{2}}du;$$
$$mdM = mr(4r-x)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du - mr(4r-x)^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}dx,$$
$$ndN = nr(r-u)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx,\ nr(r-u)^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}du,\ pdP = pr.$$
$$(r-x)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du - pru^{\frac{1}{2}}(r-x)^{-\frac{1}{2}}dx,\ qdQ$$
$$= qdxr^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}(4r-u)^{\frac{1}{2}}(r-u)^{\frac{1}{2}} - qr^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}.$$
$$(4r-u)^{\frac{1}{2}}(r-u)^{-\frac{1}{2}}du - qr^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}(r-u)^{\frac{1}{2}}(4r-u)^{-\frac{1}{2}}.$$
$$du,\ sdS = sr^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}(4r-x)^{\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}}du - sr^{\frac{1}{2}}.$$
$$u^{\frac{1}{2}}(4r-x)^{\frac{1}{2}}(r-x)^{-\frac{1}{2}}dx - sr^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}}.$$
$$(4r-x)^{-\frac{1}{2}}dx,\ tdT = tur^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx + 2tdu.$$
$$(rx)^{\frac{1}{2}},\ zdZ = zxr^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du + 2zdx(ru)^{\frac{1}{2}} \text{ also ist}$$
$$lfdL = lf[r(4r-u)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx - rx^{\frac{1}{2}}(4r-u)^{-\frac{1}{2}}du]$$
$$= lL = 2lr(4rx-ux)^{\frac{1}{2}}, \text{ eben so } qfdQ = qr.$$
$$f[(4r-u)^{\frac{1}{2}}(r-u)^{\frac{1}{2}}(rx)^{-\frac{1}{2}}dx - (4rx-ux)^{\frac{1}{2}}.$$
$$(r^2-ru)^{-\frac{1}{2}}du - (rx-ux)^{\frac{1}{2}}(4r^2-ru)^{-\frac{1}{2}}du]$$
$$= qQ = q(4r^2-ru)^{\frac{1}{2}}(rx-ux)^{\frac{1}{2}}; \text{ so auch } sS =$$
$$s(4r^2-rx)^{\frac{1}{2}}(ru-ux)^{\frac{1}{2}} = sfdS = srf[(4r-x)^{\frac{1}{2}}.$$
$$(r-x)^{\frac{1}{2}}(ru)^{-\frac{1}{2}}du - dx(4ru-ux)^{\frac{1}{2}}(r^2-rx)^{-\frac{1}{2}}$$
$$- dx(ru-ux)^{\frac{1}{2}}(r^2-rx)^{-\frac{1}{2}}]; tfdT = trf[u(rx)^{-\frac{1}{2}}.$$
$$dx + dux^{\frac{1}{2}}r^{-1}] = tT = 2tu(rx)^{\frac{1}{2}}. \text{ Und es}$$
muß $tru(rx)^{-\frac{1}{2}}dx = -2tdu(rx)^{\frac{1}{2}}$ und eben so $zrx(ru)^{-\frac{1}{2}}du = -2zdx(ru)^{\frac{1}{2}}$ seün.

Folglich kann $lfdL = lrf(4r-u)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx$ nicht $= lrx^{\frac{1}{2}}(4r-u)^{\frac{1}{2}}$ eben so $qfdQ = qrf(4r-u)^{\frac{1}{2}}.$
$(r-u)^{\frac{1}{2}}(rx)^{-\frac{1}{2}}dx$ nicht $= q(rx)^{\frac{1}{2}}(4r-u)^{\frac{1}{2}}(r-u)^{\frac{1}{2}}$
seün

seün u. s. w. bei den übrigen Sätzen. Denn es felt hier dem Differenziale etwas, um es richtig integriren zu können. Und dieses gilt von allen einzelnen Sätzen des aufgestellten Differenzials, es müßte dann die zweite unter dem WurzelZeichen negativ stehende Größe als beständig, folglich die Differenz davon $= o$ gesetzt worden seün.

Es hat mit folgendem simpeln Beispiele gleiche Bewandnis $\int x\,dy = \int dz = xy = z$ ist falsch, denn $d(xy) = d(z)$ ist $x\,dy + y\,dx = dz$, also erst $\int[x\,dy + y\,dx] = xy$, wo kann also, wenn beide, x und y, als veränderlich angesehen werden, bie erste Folgerung richtig seün; ja wenn x als beständig angenommen wird, so hat es wol seine Richtigkeit.

Das Integral wäre also:

$$Y = 2lr(4rx - ux)^{\frac{1}{2}} + 2nr(rx - ux)^{\frac{1}{2}} + 2q.$$
$$(4r^2 - ru)^{\frac{1}{2}}(rx - ux)^{\frac{1}{2}} - 2tu(rx)^{\frac{1}{2}} + 2mr.$$
$$(ru - ux)^{\frac{1}{2}} + 2pr(ru - xu)^{\frac{1}{2}} + 2s(ru)^{\frac{1}{2}}(4r - x)^{\frac{1}{2}}.$$
$$(r - x)^{\frac{1}{2}} - 2zx(ru)^{\frac{1}{2}}$$

Zweite Art der Auflösung.

Um das oben stehende aufgegebene Differenzial gehörig integriren zu können, setze man $x^{\frac{1}{2}} = -r.u^{-\frac{1}{2}}$ in folgende 4 Sätze $br^2\,dx(4rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$; $ar^2\,dx(r - x^2)^{-\frac{1}{2}}$; $fr\,dx(4r^2 - rx)^{\frac{1}{2}}(rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$; $hr\,dx(r^2 - rx)^{\frac{1}{2}}.$ $(4rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, ferner $u^{\frac{1}{2}} = -rx^{-\frac{1}{2}}$ in folgende 4 Sätze: $er^2\,du(4ru - u^2)^{-\frac{1}{2}}$; $cr^2\,du(ru - u^2)^{-\frac{1}{2}}$; $krdu(4r^2 - ru)^{\frac{1}{2}}(ru - u^2)^{-\frac{1}{2}}$ und $grdu(r^2 - ru)^{\frac{1}{2}}.$ $(4ru - u^2)^{-\frac{1}{2}}$ ebenfalls setze man $b = m$; $a = p$; $f = h = s$; $e = l$; $c = n$; $k = g = q$; Und aus obigen Differenzial wird nun folgendes:

$$dY = mr[(4r - x)^{\frac{1}{2}}du\,u^{-\frac{1}{2}} - dx\,u^{\frac{1}{2}}(4r - x)^{-\frac{1}{2}}]$$
$$+ pr[du(r - x)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}} - dx\,u^{\frac{1}{2}}(r - x)^{-\frac{1}{2}}] + sr.$$
$$[(4r - x)^{\frac{1}{2}}(r - x)^{-\frac{1}{2}}(ru)^{-\frac{1}{2}}du - (4ru - ux)^{\frac{1}{2}}.$$
$$(r^2$$

$(r^2 - rx)^{-\frac{1}{2}} dx - (ru - ux)^{\frac{1}{2}} (4r^2 - rx)^{-\frac{1}{2}} dx]$
$+ tru(rx)^{-\frac{1}{2}} dx + lr[dx(4r - u)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} - dux^{\frac{1}{2}}.$
$(4r - u)^{-\frac{1}{2}}] + nrdx(r - u)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} - dux^{\frac{1}{2}}.$
$(r - u)^{-\frac{1}{2}}] + qrdx(4r - u)^{\frac{1}{2}} (r - u)^{\frac{1}{2}} (rx)^{-\frac{1}{2}}$
$- du(4rx - ux)^{\frac{1}{2}} (r^2 - ru)^{-\frac{1}{2}} - du(rx - ux)^{\frac{1}{2}}.$
$(4r^2 - ru)^{-\frac{1}{2}}] + zrx(ru)^{-\frac{1}{2}} du.$

Von diesem Differenzial ist jeder einzelne Satz, der mit einem besondern Buchstaben als Koeffizienten multiplizirt ist, ein vollkommenes Differenzial, das sich vollkommen integriren läßt. So ist

$A = mr\int(u^{-\frac{1}{2}}(4r - x)^{\frac{1}{2}} du - (4r - x)^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} dx)$
$= 2mru^{\frac{1}{2}}(4r - x)^{\frac{1}{2}}$
$B = pr\int[u^{-\frac{1}{2}}(r - x)^{\frac{1}{2}} du - (r - x)^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} dx]$
$= 2pru^{\frac{1}{2}}(r - x)^{\frac{1}{2}}$
$C = sr\int[(4r - x)^{\frac{1}{2}}(r - x)^{\frac{1}{2}}(ru)^{-\frac{1}{2}} du - (4ru - ux)^{\frac{1}{2}}.$
$(r^2 - rx)^{-\frac{1}{2}} dx - (ru - ux)^{\frac{1}{2}}(4r^2 - rx)^{-\frac{1}{2}} dx]$
$= 2sr(4r^2 - rx)^{\frac{1}{2}}(ru - xu)^{\frac{1}{2}}$
$D = tr\int u(rx)^{-\frac{1}{2}} dx = -2tu(rx)^{\frac{1}{2}}$

E, F, G und H für ähnliche Sätze wie A, B, C und D, nur daß dort u, wo hier x und dort x, wo hier u steht. Also wäre $Y = A + B + C + D + E + F + G + H$
$= 2mr(4ru - ux)^{\frac{1}{2}} + 2pr(ru - ux)^{\frac{1}{2}} + 2s.$
$(4r^2 - rx)^{\frac{1}{2}}(ru - xu)^{\frac{1}{2}} - 2tu(rx)^{\frac{1}{2}} + 2lr.$
$(4rx - ux)^{\frac{1}{2}} + 2n(rx - ux)^{\frac{1}{2}} + 2q(r^2 - ru)^{\frac{1}{2}}.$
$(4rx - ux)^{\frac{1}{2}} - 2zx(ru)^{\frac{1}{2}}.$

Denn man differenziire (nach Kästner's Rechnung des Unendlichen) z. B. $A = 2mru^{\frac{1}{2}}(4r - x)^{\frac{1}{2}}$
$A^2 = 4m^2r^2(4ru - ux)\ 2AdA = 4m^2r^2.$
$(4r - x)du - udx.4m^2r^2;\ dA = mr(4r - x)^{\frac{1}{2}}.$
$u^{-\frac{1}{2}} du$

$u^{-\frac{1}{2}}du - mru^{\frac{1}{2}}(4r-x)^{-\frac{1}{2}}dx$, und da $m = b$ und $u^{\frac{1}{2}} = -rx^{-\frac{1}{2}}$ so ist $dA = mr(4r-x)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}$. $du + br^2(4rx-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$. Alsdann ist aber $\int dA = A = 2mr(4ru - ux)^{\frac{1}{2}}$ also $mr\int[4r-x)^{\frac{1}{2}}$. $u^{-\frac{1}{2}}du - u^{\frac{1}{2}}(4r-x)^{-\frac{1}{2}}dx] = 2mru^{\frac{1}{2}}(4r-x)^{\frac{1}{2}}$. Auf gleiche Weise wird geschlossen für E.

Ferner $B = 2pru^{\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}}$, $B^2 = 4p^2r^2u$. $(r-x)$, $2BdB = 4p^2r^2(r-x)du - 4p^2r^2udx$; $dB = pru^{-\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}}du - pru^{\frac{1}{2}}(r-x)^{-\frac{1}{2}}dx$; folglich $pr\int[u^{-\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}}du - u^{\frac{1}{2}}(r-x)^{-\frac{1}{2}}dx]$ $= 2pru^{\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}}$; nun war $p = a$ und $u^{\frac{1}{2}} = -rx^{-\frac{1}{2}}$ folglich $dB = pr(r-x)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}} + ar^2(rx-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$. Eben so für F. Es ist

$C = 2s(ru)^{\frac{1}{2}}(4r-x)^{\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}}$, $C^2 = 4s^2ru$. $(4r^2-5rx+x^2)$, $2CdC = 4s^2r[(4r-x)$. $(r-x)du - u(4r-x)dx - u(r-x)dx]$ $dC = sr^{\frac{1}{2}}[du(4r-x)^{\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}}$. $(4r-x)^{\frac{1}{2}}(r-x)^{-\frac{1}{2}}dx - u^{\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}}(4r-x)^{-\frac{1}{2}}$. $dx]$ und also $\int dC = C = 2s(4ru-xu)^{\frac{1}{2}}(r^2-rx)^{\frac{1}{2}}$: nun war $f = h = s$ und $u^{\frac{1}{2}} = -rx^{-\frac{1}{2}}$ folglich $dC - sdu(4r-x)^{\frac{1}{2}}(r^2-rx)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}} + frdx$. $(4r^2-rx)^{\frac{1}{2}}(rx-x^2)^{-\frac{1}{2}} + hrdx(r^2-rx)^{\frac{1}{2}}$. $(4rx-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Desgleichen für G.

Es ist $D = -2tu(rx)^{\frac{1}{2}}$, $D^2 = +4t^2ru^2x$, $2DdD = +4t^2ru^2dx + 8t^2rxudu$, $dD = -tr^{\frac{1}{2}}ux^{-\frac{1}{2}}dx - 2t(rx)^{\frac{1}{2}}du$. Nun ist doch $r = -(ux)^{\frac{1}{2}}$ also $r^2 = xu$. Man differenziire hier, so wird $xdu + udx = d(r^2) = o$, weil r unveränderlich ist, also $du = -ux^{-1}dx$ und $dx = -xu^{-1}du$ man setze den Wert in dD, und der letztere wäre in dH zu

setzen,

setzen, so wird $dD = -tur^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx + 2tru.(rx)^{-\frac{1}{2}}dx = +tur^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx$ Desgleichen $dH = -zxr^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du + 2zxr^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}dx = +zxr^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du.$

Nach Obigem ist also vom aufgegebenen Differenzial das Integral, das bereits auch oben befindliche. Nimmt man ferner an $m = p = s = z$ und $l = n = q = t$, so wird $Y = 2zru^{\frac{1}{2}}[(4r-x)^{\frac{1}{2}} + (r-x)^{\frac{1}{2}} + (4r-x)^{\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}}r^{-\frac{1}{2}} - xr^{-\frac{1}{2}}] + 2trx^{\frac{1}{2}}.[(4r-u)^{\frac{1}{2}} + (r-u)^{\frac{1}{2}} + (4r-u)^{\frac{1}{2}}(r-u)^{\frac{1}{2}}.r^{-\frac{1}{2}} - ur^{-\frac{1}{2}}].$

Setzt man $x = o$, so wird auch Y und $u = o$; denn wenn man $x = o$ setzt, so ist $r^2 = o.uo = r^2$ also auch $u = o$ und aus dieser Ursache $Y = o$, weil $Y =$ einer Funktion von u und x ist. (Hier möchten einige einwenden, dieser Schluß seü nicht richtig und u nicht $= o$, sondern $= \frac{1}{o} = \infty$ und umgekert für x; ich will nicht in Abrede seün, daß Pedrayes es auch so in der eingesandten Auflößung genommen und deswegen das Problem nicht für gelößt erklärt habe. — Ich verweiße hier auf eine mit ω bezeichnete nach geschlossener Abhandlung stehende Anmerkung von mir. — —)

Es seü oben $t = z$, so ist

$$Y = 2t[4r^2 - rx)^{\frac{1}{2}} + (r^2 - rx)^{\frac{1}{2}} + ((4r-x).(r-x))^{\frac{1}{2}} - (ux)^{\frac{1}{2}}](ru)^{\frac{1}{2}} + 2t[(4r^2 - ru)^{\frac{1}{2}} + (r^2 - ru)^{\frac{1}{2}} + [(4r-u)(r-u)]^{\frac{1}{2}} - (ux)^{\frac{1}{2}}](rx)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2t(ru)^{\frac{1}{2}}[(4r^2 - rx)^{\frac{1}{2}} + (r^2 - rx)^{\frac{1}{2}} + (4r-x)^{\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}} + r] + 2t(rx)^{\frac{1}{2}}.[(4r^2 - ru)^{\frac{1}{2}} + (r^2 - ru)^{\frac{1}{2}} + (4r-u)^{\frac{1}{2}}.(r-u)^{\frac{1}{2}} + r]$$

$$Y = 2t(ru)^{\frac{1}{2}}[(r^{\frac{1}{2}} + (4r-x)^{\frac{1}{2}}].[r^{\frac{1}{2}} + (r-x)^{\frac{1}{2}}] + 2t(rx)^{\frac{1}{2}}[r^{\frac{1}{2}} + (4r-u)^{\frac{1}{2}}].[r^{\frac{1}{2}} + (r-u)^{\frac{1}{2}}].$$

Wird

Wird hier $x = r$, so wird auch $u = r$, denn $xu = r^2$ und $ru = r^2$ also $u = r$, so ist $Y = 4tr^2(1 + 3^{\frac{1}{2}})$.

Wenn man den Wert von $u = r^2 x^{-1}$ anstatt u in den Satz $rx^{\frac{1}{2}}[(r^{\frac{1}{2}} + (4r - u)^{\frac{1}{2}}] . [r^{\frac{1}{2}} + (r - u)^{\frac{1}{2}}]$ der letzten Gl. und den Wert von $x = r^2 u^{-1}$ anstatt x in den Satz $(ru)^{\frac{1}{2}}[r^{\frac{1}{2}} + (4r - x)^{\frac{1}{2}}] . [r^{\frac{1}{2}} + (r - x)^{\frac{1}{2}}]$ derselben Gleich. setzt, so wird die folgende aus ihr.

$$Y = 2tr^2(rx)^{-\frac{1}{2}}[x^{\frac{1}{2}} + (4x - r)^{\frac{1}{2}}] . [x^{\frac{1}{2}} + (x - r)^{\frac{1}{2}}] + 2tr^2(ru)^{-\frac{1}{2}}[u^{\frac{1}{2}} + (4u - r)^{\frac{1}{2}}] . [u^{\frac{1}{2}} + (u - r)^{\frac{1}{2}}] = 2tr^2(rx)^{-\frac{1}{2}}[x^{\frac{1}{2}} + (4x - r)^{\frac{1}{2}}] . [x^{\frac{1}{2}} + (x - r)^{\frac{1}{2}}] - 2tr^2(rx)^{-\frac{1}{2}}[r^{\frac{1}{2}} + (4r - x)^{\frac{1}{2}}] . [r^{\frac{1}{2}} + (r - x)^{\frac{1}{2}}] = 2tr^2(ru)^{\frac{1}{2}}[u^{\frac{1}{2}} + (4u - r)^{\frac{1}{2}}] . [u^{\frac{1}{2}} + (u - r)^{\frac{1}{2}}] - 2tr^2[r^{\frac{1}{2}} + (4r - u)^{\frac{1}{2}}] . [r^{\frac{1}{2}} + (r - u)^{\frac{1}{2}}](ru)^{-\frac{1}{2}}.$$

Allein würde man in folgenden Sätzen des zum Integriren aufgegebenen Differenzials, $ar(rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$; $br^2(4rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$; $fr(4r^2 - rx)^{\frac{1}{2}}(rx - x^2)^{-\frac{1}{2}} . dx$; $hr(r^2 - rx)^{\frac{1}{2}}(4rx - x)^{-\frac{1}{2}}dx$ den folgenden positiven Wert von $x^{\frac{1}{2}} = ru^{-\frac{1}{2}}$ und $b = -m$, $a = -p$; $f = h = s$ ferner in folgenden Sätzen desselben $cr^2 . (ru - u^2)^{-\frac{1}{2}}du$; $er^2(4ru - u^2)^{-\frac{1}{2}}du$; $kr(4r^2 - ru)^{\frac{1}{2}} . (ru - u^2)^{-\frac{1}{2}}du$; $gr(r^2 - ru)(4ru - u^2)^{-\frac{1}{2}}du$ den positiven Wert von $u^{\frac{1}{2}} = rx^{-\frac{1}{2}}$ und $e = -l$, $c = -n$, $k = g = -q$ setzen, auf eben die Weise wie oben verfaren und die nach dieser Substitution zusammengehöriger Sätze integriren, so würde man das obige Integral erhalten, das sich in folgendes verwandeln läßt.

$$Y = 2r^2(rx)^{-\frac{1}{2}}[m(4r^2 - rx)^{\frac{1}{2}} + p(r^2 - rx)^{\frac{1}{2}} + s(4r - x)^{\frac{1}{2}}(r - x)^{\frac{1}{2}} - tr^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}] + 2r^2(ru)^{-\frac{1}{2}} . [l(4r^2 - ru)^{\frac{1}{2}} + n(r^2 - ru)^{\frac{1}{2}} + q(4r - u)^{\frac{1}{2}} . (r - u)^{\frac{1}{2}} - zr^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}].$$

Se

Je nachdem man nun die Koeffizienten eines jeden Satzes von einem der beiden HauptSätze, von welchen jedweder eine von den veränderlichen Größen enthält, einem gemeinschaftlichen Koeffizienten positiv oder negativ gleichsetzt oder sie sonst mit einander in demselben HauptSatze vergleicht, dieses ferner in beiden HauptSätzen thut und die Sätze von diesen beiden alsdann gegenseitig vergleicht: entsteht eine Menge von Formeln, die zur Bestimmung des Wertes von Y dienen und deren mögliche Anzal vermittelst der KombinationsLere sich leicht bestimmt angeben läßt. So z. B. setze man in die allerletzte Formel $s = -m$ und $z = p = m$ ferner $n = l = z = -q$, so wird

$$Y = 2mr^2(rx)^{-\frac{1}{2}}[(4r^2 - rx)^{\frac{1}{2}} + (r^2 - rx)^{\frac{1}{2}} - (4r - x)^{\frac{1}{2}}(r - x)^{\frac{1}{2}} - r] + 2nr^2(ru)^{-\frac{1}{2}}.$$
$$[(4r^2 - ru)^{\frac{1}{2}} + (r^2 - ru)^{\frac{1}{2}} - (4r - u)^{\frac{1}{2}}.$$
$$(r - u)^{\frac{1}{2}} - r]$$
$$= 2mr^2(rx)^{-\frac{1}{2}}[(\pm(4r - x)^{\frac{1}{2}} \mp r^{\frac{1}{2}}).(\pm r^{\frac{1}{2}} \mp$$
$$(r - x)^{\frac{1}{2}})] + 2nr^2(ru)^{-\frac{1}{2}}[(\pm r^{\frac{1}{2}} \mp (4r - u)^{\frac{1}{2}}).$$
$$(\pm(r - u)^{\frac{1}{2}} \mp r^{\frac{1}{2}}].$$

Jene Abhandlung fing mit der folgenden 3ten AuflösungsArt an, zu der ich im Jahr 1798 zuletzt gelangte. — Das aufgegebene Differenzial ist

$$dY = mr(4r - x)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du + br^2(4r - x)^{-\frac{1}{2}}.$$
$$x^{-\frac{1}{2}}dx + pr(r - x)^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du + ar^2(rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$
$$dx + srdu(4r - x)^{\frac{1}{2}}(r - x)^{\frac{1}{2}}(ru)^{-\frac{1}{2}} + frdx.$$
$$(4r^2 - rx)^{\frac{1}{2}}(rx - x^2)^{-\frac{1}{2}} + hrdx(r^2 - rx)^{\frac{1}{2}}.$$
$$(4rx - x^2)^{-\frac{1}{2}} + tru(rx)^{-\frac{1}{2}}dx + lr(4r - u)^{\frac{1}{2}}.$$
$$x^{-\frac{1}{2}} + er^2(4ru - u^2)^{-\frac{1}{2}}du + nr(r - u)^{\frac{1}{2}}.$$
$$x^{-\frac{1}{2}}dx + cr^2(ru - u^2)^{-\frac{1}{2}}du + qr(r - u)^{\frac{1}{2}}.$$
$$(4r - u)^{\frac{1}{2}}(rx)^{-\frac{1}{2}}dx + krdu(4r^2 - ru)^{\frac{1}{2}}.$$
$$(ru - u^2)^{-\frac{1}{2}} + gr(r^2 - ru)^{\frac{1}{2}}(4ru - u^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$+ zrxdu(ru)^{-\frac{1}{2}}.$$

Es seŭ $u = r^4 \varphi$ und $x = r^{-2} \varphi^{-1}$ also $u^{\frac{1}{2}} = r^2 \varphi^{\frac{1}{2}}$ und $x^{\frac{1}{2}} = r^{-1} \varphi^{-\frac{1}{2}}$ so ist $d(u) = d(r^4 \varphi)$ und die $d(x) = d(r^{-2} \varphi^{-1})$, $du = r^4 d\varphi$ und $dx = -r^{-2} \varphi^{-2} d\varphi$. Man setze nun die Werte von u und x und du und dx in Funktionen von φ und Differenzialen von $d\varphi$ in obige Gleichung und man erhält ein Differenzial, daß nur Funktionen und Diffenrenziale von φ enthält

$$
\begin{aligned}
&m r^2 \varphi^{-1} d\varphi (4r^3 \varphi - 1)^{\frac{1}{2}} - b r^2 \varphi^{-1} (4r^3 \varphi - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \\
&d\varphi + p r^2 \varphi^{-1} (r^3 \varphi - 1)^{-\frac{1}{2}} d\varphi - a r^2 \varphi^{-1} \cdot \\
&(r^3 \varphi - 1)^{-\frac{1}{2}} d\varphi + s r d\varphi (r\varphi)^{-\frac{1}{2}} \varphi^{-1} (4r^3 \varphi - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot \\
&(r^3 \varphi - 1)^{\frac{1}{2}} - f r (4r^4 \varphi - r)^{\frac{1}{2}} (r^3 \varphi^2 - \varphi)^{-\frac{1}{2}} \cdot \\
&\varphi^{-1} d\varphi - h \varphi^{-1} (r^4 \varphi - r)^{\frac{1}{2}} (4r^3 \varphi^2 - \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \\
&- t r^4 (r\varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi - l r (4 - r^3 \varphi)^{\frac{1}{2}} \varphi^{-1} (r\varphi)^{-\frac{1}{2}} \\
&+ e r^4 (4 - r^4 \varphi)^{-\frac{1}{2}} (r\varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi - n r (1 - r^3 \varphi)^{\frac{1}{2}} \cdot \\
&(r\varphi)^{-\frac{1}{2}} \varphi^{-1} d\varphi + c r^4 (r\varphi)^{-\frac{1}{2}} (1 - r^3 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \\
&- q r \varphi^{-1} (1 - r^3 \varphi)^{\frac{1}{2}} (4 - r^3 \varphi)^{\frac{1}{2}} (r\varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \\
&+ k r^4 (4 - r^3 \varphi)^{\frac{1}{2}} (1 - r^3 \varphi)^{-\frac{1}{2}} (r\varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \\
&+ g r^4 (1 - r^3 \varphi)^{\frac{1}{2}} (4 - r^3 \varphi)^{-\frac{1}{2}} (r\varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \\
&+ z r \varphi^{-1} (r\varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi = dY.
\end{aligned}
$$

Man setze in diese letzte Gleichung $b = -m$, $a = -p$, $f = h = -s$, $e = -l$, $c = -n$, $k = g = -q$ so wird

$$
\begin{aligned}
dY = &m r^2 d\varphi (4r^3 \varphi - 1 + 1) \varphi^{-1} \cdot \\
&(4r^3 \varphi - 1)^{-\frac{1}{2}} + p r^2 d\varphi (r^3 \varphi - 1 + 1) \varphi^{-1} \cdot \\
&(r^3 \varphi - 1)^{-\frac{1}{2}} + s r d\varphi [4r^6 \varphi^2 - 5 r^3 \varphi + 1 \\
&+ (4r^3 \varphi - 1) + (r^3 \varphi - 1)] \varphi^{-1} (r\varphi)^{-\frac{1}{2}} \cdot \\
&(r^3 \varphi - 1)^{-\frac{1}{2}} (4r^3 \varphi - 1)^{-\frac{1}{2}} - t r^4 (r\varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \\
&- l r d\varphi (4 - r^3 \varphi)^{\frac{1}{2}} \varphi (r\varphi)^{-\frac{1}{2}} + l r^4 \varphi d\varphi (4 - r^3 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \\
&- n r d\varphi (1 - r^3 \varphi + r^3 \varphi) \varphi (r\varphi)^{-\frac{1}{2}} (1 - r^3 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \\
&- q r d\varphi \varphi^{-1} (r\varphi)^{-\frac{1}{2}} (1 - r^3 \varphi)^{-\frac{1}{2}} (4 - r^3 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \cdot \\
&[4 - 5 r^3 \varphi
\end{aligned}
$$

$[4 - 5r^3\varphi + r^6\varphi^2 + 5r^3\varphi - 2r^6\varphi^2] + 2rd\varphi.$
$\varphi^{-1}(r\varphi)^{-\frac{1}{2}}.$

Man integrire nun jeden dieser Sätze für sich, so erhält man folgende Gleichung oder folgendes Integral von dY, als eine Funktion von φ, die aus rationalen Theilen, Wurzelgrößen enthaltend, besteht.

$2mr^2(4r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}} + 2pr^2(r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}} + 2sr.$
$(r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}(4r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}(r\varphi)^{-\frac{1}{2}} - 2tr^3(r\varphi)^{\frac{1}{2}}$
$+ 2lr(4 - r^3\varphi)^{\frac{1}{2}}(r\varphi)^{-\frac{1}{2}} + 2nr(1 - r^3\varphi)^{\frac{1}{2}}.$
$(r\varphi)^{-\frac{1}{2}} + 2qr(4 - r^3\varphi)^{\frac{1}{2}}(1 - r^3\varphi)^{\frac{1}{2}}(r\varphi)^{-\frac{1}{2}}$
$- 2zr(r\varphi)^{-\frac{1}{2}} = A + B + C + D + E + F$
$+ G + H = Y.$ Denn man differenziire jeden von diesen Sätzen, so ergiebt sich obiges Differenzial wieder. Z. B. A und B

$A = 2mr^2(4r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}};\ A^2 = 4m^2r^4(4r^3\varphi - 1);$
$2AdA = 4m^2r^2(4r^3d\varphi);\ dA = mr^2(4r^3d\varphi).$
$(4r^3\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}};\ dA = mr^2d\varphi(4r^3\varphi - 1)\varphi^{-1}.$
$(4r^3\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}} + mr^2d\varphi\varphi^{-1}(4r^3\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}};$
$mr^2d\varphi(4r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}\varphi^{-1} + mr^2d\varphi\varphi^{-1}.$
$(4r^3\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}}$ und wenn man hier im zweiten Gliede statt m wieder $-b$ setzt, so ergeben sich obige Glieder wieder: $mr^2d\varphi(4r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}\varphi^{-1} - br^2d\varphi.$
$(4r^3\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}}\varphi^{-1}.$

$B = 2pr^2(r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}};\ B^2 = 4p^2r^4(r^3\varphi - 1);$
$4p^2r^4(r^3d\varphi) = 2BdB;\ dB = pr^2d\varphi r^3(r^3\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}}$
$= pr^2d\varphi\varphi^{-1}(r^3\varphi - 1)(r^3\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}} + pr^2.$
$d\varphi\varphi^{-1}(r^3\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}}$ in diesem letzten Gliede $-a$ statt $+p$ gesetzt, giebt $pr^2d\varphi(r^3\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}}\varphi^{-1} - ar^2.$
$d\varphi\varphi^{-1}(r^3\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}}.$

C =

$C = 2sr(4r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}(r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}(r\varphi)^{-\frac{1}{2}}$;
$C^2 = 4s^2r^2(r\varphi)^{-1}$; $4r^6\varphi^2 - 5r^3\varphi + 1 = 4s^2r$.
$(4r^6\varphi - sr^3 + \varphi^{-1})$; $2CdC = 4s^2r(4r^6 - \varphi^{-2})$.
$d\varphi$; $dC = sr(4r^6\varphi^2 - 1)\varphi^{-\frac{1}{2}}d\varphi\varphi^{-2}r^{-\frac{1}{2}}$.
$(4r^3\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}}(r^2\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}}$; $dC = \varphi^{-2}r^{-\frac{1}{2}}$.
$(4r^3\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}}(r^3\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}}sr[(4r^6\varphi^2 - 5r^3\varphi + 1)$
$+ (4r^3\varphi - 1) + (r^3\varphi - 1)]\varphi^{\frac{1}{2}}d\varphi$; $dC = srd\varphi$.
$(4r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}(r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}(r\varphi)^{-\frac{1}{2}} + srd\varphi(4r^3\varphi - 1)$.
$\varphi^{-1}(r\varphi)^{-\frac{1}{2}}(r^3\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}} + srd\varphi(r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}$.
$(4r^3\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}}\varphi^{-1}(r\varphi)^{-\frac{1}{2}}$ Es ſeŭ nun wieder im zweiten Gliede $-f$ ſtatt $+s$ und im 3ten $-h$ ſtatt $+s$ geſetzt, ſo iſt $dC = srd\varphi(4r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}(r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}$.
$\varphi^{-1}(r\varphi)^{-\frac{1}{2}} - frd\varphi(4r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}\varphi^{-1}(r\varphi)^{-\frac{1}{2}}$.
$(r^3\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}} - hrd\varphi(r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}\varphi^{-1}(r\varphi)^{-\frac{1}{2}}$.
$(4r^3\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}}$, wie oben.

$D = 2tr^3(r\varphi)^{\frac{1}{2}}$, $D^2 = 4t^2r^7\varphi$, $2DdD = 4t^2r^7d\varphi$, $dD = -tr^4d\varphi(r\varphi)^{-\frac{1}{2}}$, alſo $\int -tr^4 d\varphi(r\varphi)^{-\frac{1}{2}} = -2tr^3(r\varphi)^{\frac{1}{2}}$.

Der Beweis für E, F, G und H iſt der wie für A, B, C und D.

Sind aber alle Theile richtig integrirt, ſo muß auch das Ganze, das aus dieſen Theilen beſteht, richtig integrirt ſeŭn und vom aufgegebenen Differenzial, wie ich es oben geordnet habe und unter der Bedingung, daß $m = -b$, $p = -a$, $s = -f = -h$, $l = -e$, $n = -c$ $q = -k = -g$ iſt, möchte dann one Widerrede das Integral ſeŭn $Y = 2mr^2(4r^3\varphi - 1)^{-\frac{1}{2}} + 2pr^2$.
$(r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}} + 2sr(r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}(4r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}$.
$(r\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 2tr^4(r\varphi)^{-\frac{1}{2}} + 2l(4 - r^3\varphi)^{\frac{1}{2}}(r\varphi)^{-\frac{1}{2}}$
$+ 2nr(1 - r^3\varphi^3)^{\frac{1}{2}}(r\varphi)^{-\frac{1}{2}} + 2qr(4 - r^3\varphi)^{\frac{1}{2}}$.
$(1 - r^3\varphi)^{\frac{1}{2}}(r\varphi)^{-\frac{1}{2}} - 2zr(r\varphi)^{-\frac{1}{2}}$.

Allein

Allein es soll Y in Funktionen von x und u ausgedrückt werden, man erinnere sich daher, daß zu Anfange festgesetzt wurde, es seü $x = r^{-2} \varphi^{-1}$ also $r^2 \varphi = x^{-1}$, diesen Wert setze man in die Faktoren $(4r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}$ und $(r^3\varphi - 1)^{\frac{1}{2}}$ alsdann $r^{-1} x^{-\frac{1}{2}}$ statt $\varphi^{\frac{1}{2}}$ in die vier ersten Glieder der Gleichung; ferner war $u = r^4\varphi$ hierauf diesen Wert in die Faktoren $(4 - r^3\varphi)^{\frac{1}{2}}$ und $(1 - r^3\varphi)^{\frac{1}{2}}$ in der andern Hälfte gesetzt, alsdann $r^{-2} u^{\frac{1}{2}}$ statt $\varphi^{\frac{1}{2}}$ in die vier letzten Glieder der Gleichung, so erhält man

$$Y = 2mr^2(4r - x)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + 2pr^2(r - x)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$$
$$+ 2sr^2(4r - x)^{\frac{1}{2}}(r - x)^{\frac{1}{2}}(rx)^{-\frac{1}{2}} - 2tr^3(rx)^{-\frac{1}{2}}$$
$$+ 2lr^2(4r - u)^{\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}} + 2nr^2(r - u)^{\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}}$$
$$+ 2qr^2(4ru - u)^{\frac{1}{2}}(r - u)^{\frac{1}{2}}(ru)^{-\frac{1}{2}} - 2zr^3(ru)^{-\frac{1}{2}}.$$

Welche Gleichung sich sogleich in die in den beiden vorigen Auflösungsarten befindliche verwandelt, wenn man bedenkt, daß $x^{\frac{1}{2}} = r^{-1}\varphi^{-\frac{1}{2}} = ru^{-\frac{1}{2}}$, also $(xu)^{\frac{1}{2}} = r$ und folglich $x^{-\frac{1}{2}} = r^{-1} u^{\frac{1}{2}}$ und $u^{-\frac{1}{2}} = r^{-1} x^{\frac{1}{2}}$ ist, erstern Wert in die 4 ersten und letztern Wert in die 4 letzten Glieder der obigen Gleichung setzt. So weit die eingesandte Abhandlung.

α. Anmerkung.

Wenn und inwiefern laut obigem Programme in einer besondern Funktion von r und φ (einer veränderlichen Größe) x und auch u, jedes für sich, gegeben seün sollen; so und insofern muß auch x direkte in einer Funktion von u und r und umgekert u direkte in einer Funktion von x und r sich darstellen lassen, weil man ja statt φ im ersten Falle seinen Wert in u oder seine Funktion von u in der Funktion von und durch φ für x stattsetzen kann und so das Umgekerte im andern Fall.

Demnach setze ich allgemein $x = r^n \varphi^{\alpha}(1 + \mu)$; $u = r^m \varphi^{\beta}(1 + \lambda)$, also $u^{\alpha} r^{-m\alpha}(1 - \lambda)^{-\alpha} = x^{\beta} r^{-n\beta} \cdot (1 + \lambda)^{-\beta}$ oder $x^{\beta} r^{m\alpha}(1 + \lambda)^{\alpha} = u^{\alpha} r^{n\beta}(1 + \mu)^{\beta}$. Absolut positiv müssen β und α seün, weil sonst u nicht zu=

zugleich $= o$ ist, wenn x es wird und x nicht zugleich $= o$, wenn $u = o$ ist. Es müssen dann auch, wenn Auflösung statt haben soll, die Faktoren $(1 + \lambda)^{\alpha}$ und $(1 + \mu)^{\beta}$ solche seün, daß sie kein φ in sich oder in ihren Gliedern enthalten, oder daß sie sich wenigstens (da eben dies in ihnen vorauszusetzen war, weil ja in der ersten obigen Gleichung x durch eine Reihe von Potenzen von φ und eben so in der zweiten obigen Gleichung u durch eine Reihe von Potenzen von φ gegeben seün könne) nach den Regeln der Verwandlung in solche verwandeln lassen, daß z. B. in der

Gleichung $\varphi = [r^{-n} x (1 + \mu)^{-1}]^{\frac{1}{\alpha}}$, das φ blos durch r und x, also $(1 + \mu)^{-1}$ in lauter r und x und in der

Gleichung $\varphi = [u r^{-n} (1 + \lambda)^{-1}]^{\frac{1}{\beta}}$ das φ blos durch r und x, also $(1 + \lambda)^{-1}$ in lauter r und u gegeben ist. Ferner muß $(1 + \lambda)^{\alpha}$ und auch $(1 + \mu)^{\beta}$ in der Gleichung

$x = [u^{\alpha} r^{n\beta} (1 + \mu)^{\beta} r^{-m\alpha} (1 + \lambda)^{-\alpha}]^{\frac{1}{\beta}}$ in einem Ausdruck von r und u, und umgekert $(1 + \mu)^{\beta}$ und $(1 + \lambda)^{\alpha}$ in einem Ausdruck von r und x für die Gleichung $u = r^{m}$.

$(1 + \lambda) [x^{\beta} r^{-n\beta} (1 + \mu)^{-\beta}]^{\frac{1}{\alpha}}$ darstellen lassen. Unmöglich kann μ und λ jedes als Größe so beschaffen seün, daß es $= o$ wird, wie x oder u oder φ es wird und auch sich in einer Funktion von φ oder x oder u verwandeln lasse; μ und λ sind also beide als $= o$ anzusehen, weil sonst keine Auflösung jenes Problems möglich seün möchte. Also $x = r^{n} \varphi^{\alpha}$ und $u = r^{m} \varphi^{\beta}$; $x^{\beta} r^{-n\beta} = \varphi^{\alpha\beta} = u^{\alpha} \cdot r^{-m\alpha}$ mithin $x^{\beta} r^{m\alpha} = u^{\alpha} r^{n\beta}$ Hier α und β können, wie ich schon erinnert habe, nur positiv seün, weil sonst, wenn $u = o$ nicht auch $x = o$, sondern $x = \frac{1}{o} = \infty$ seün würde und so umgekert. Ob aber n und m gebrochene oder sich gleiche oder entgegengesetzte Größen sind, hat hier keinen Einfluß auf das wechselseitige Vernichten. —

Aus obigen folgt dann, daß $x^{\beta} = u^{\alpha} r^{n\beta - m\alpha}$ und $u^{\alpha} = x^{\beta} r^{m\alpha - n\beta}$ man kann daher, um abzukürzen, $n\beta - m\alpha = \gamma$ setzen also $x^{\beta} = u^{\alpha} r^{\gamma}$ und $u^{\alpha} = x^{\beta} r^{-\gamma}$.

u =

$u = (x^{\beta} r^{-\gamma})^{\frac{1}{\alpha}}$ und $x = (u^{\alpha} r^{\gamma})^{\frac{1}{\beta}}$: ist $u = r$ so ist $x = r^{\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}$ ist $x = r$ so ist $u = r^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha}}$. Auch ist $du = r^{\frac{-\gamma}{\alpha}} x^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} dx\alpha(\beta-\alpha)^{-1}$ und $dx = r^{\frac{\gamma}{\beta}} u^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}} du \cdot \beta(\alpha-\beta)^{-1}$. Also $du\, u^{-\frac{1}{2}} = (x^{\beta} r^{+\gamma})^{\frac{1}{-\alpha}} r^{\frac{-\gamma}{\alpha}}$. $x^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} dx\alpha(\beta-\alpha)^{-1} = r^{\frac{-\gamma}{2\alpha}} x^{\frac{\beta-2\alpha}{2\alpha}} dx\alpha(\beta-\alpha)^{-1}$ und $dx\, x^{-\frac{1}{2}} = r^{\frac{\gamma}{2\beta}} u^{\frac{\alpha-2\beta}{2\beta}} du\, \beta(\alpha-\beta)^{-1}$.

Dieses Raisonnement, das ich während dieser jetzigen neuen Ueberarbeitung dieser Abhandlung anstellte, leitete mich zur folgenden Auflösung, wovon freilich keiner der einzelnen DifferenzialSätze jeder für sich betrachtet, und die beiden letztern ausgenommen, sich in einer endlichen Reihe oder Anzal Sätze auf die bekannte Methode integriren läßt. Eben diese ganze Auflösung zeigt deutlich, wie unbestimmt die ganze Aufgabe überhaupt seŭ, sowol nach Sinn als Möglichkeit. —

Auflösung.

Ich lasse die Sätze hier folgen, wie sie Pedrayes ordnete, indem ich das Differenzial noch einmal hersetze.

$$dY = ar^2 dx(r-x)^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + br^2 dx u^{-\frac{1}{2}}.$$
$$(4r-x)^{-\frac{1}{2}} + cr^2 du u^{-\frac{1}{2}} (r-u)^{-\frac{1}{2}} + er^2 du u^{-\frac{1}{2}}.$$
$$(4r-u)^{-\frac{1}{2}} + fr(4r^2-rx)^{\frac{1}{2}} dx(rx-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$+ hr(r^2-rx)^{\frac{1}{2}} dx x^{-\frac{1}{2}} (4r-x)^{-\frac{1}{2}} + kr(4r^2-ru)^{\frac{1}{2}} du.$$
$$(r-u)^{-\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}} + gr(r^2-ru)^{\frac{1}{2}} du u^{-\frac{1}{2}} (4r-u)^{-\frac{1}{2}}$$
$$+ lr dx x^{-\frac{1}{2}} (4r-u)^{\frac{1}{2}} + mr du u^{-\frac{1}{2}} (4r-x)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ nr dx x^{-\frac{1}{2}} (r-u)^{\frac{1}{2}} + pr du u^{-\frac{1}{2}} (r-x)^{\frac{1}{2}} + qr.$$
$$dx(rx)^{-\frac{1}{2}} (4r-u)^{\frac{1}{2}} (r-u)^{\frac{1}{2}} + sr du(ru)^{-\frac{1}{2}}.$$
$$(4r-x)^{\frac{1}{2}} (r-x)^{\frac{1}{2}} + tru dx(rx)^{-\frac{1}{2}} + zrx du.$$
$$(ru)^{-\frac{1}{2}} = a\,dA + b\,dB + c\,dC + e\,dE + f\,dF + h\,dH$$

$+ hdH + gdG + kdK + ldL + mdM + ndN + pdP + qdQ + sdS + tdT + zdZ.$

Wenn man im ersten und zweiten Satze $(r - x)^{-\frac{1}{2}}$ und $(4r - x)^{-\frac{1}{2}}$ nach der BinomialFormel in eine unendliche Reihe entwickelt, dann mit $rx^{-\frac{1}{2}}dx$ darein multiplizirt und hierauf integrirt, so erhält man folgende beide Reihen:

$$arfrdx\,x^{-\frac{1}{2}}(r-x)^{-\frac{1}{2}} = (ar)2r\left[\left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1.1}{2.3}\cdot\left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\cdot\left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{7}{2}} + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{9}{2}} \text{ u. f. w.}\right] \text{ und}$$

$$brfrdx\,x^{-\frac{1}{2}}(4r-x)^{-\frac{1}{2}} = (br)2r\left[\left(\frac{x}{4r}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1.1}{2.3}\cdot\left(\frac{x}{4r}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(\frac{x}{4r}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{7}{2}} + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\left(\frac{x}{4r}\right)^{\frac{9}{2}} \text{ u. f. w.}\right]$$

Eine leichte Vergleichung mit dem bekannten Ausdruck, den Bogen aus dem Quersinus zu finden, daß die erste erste Reihe $= ar$ multiplizirt mit dem Bogen vom doppelten Quersinus x, die andere br X mit dem Bogen vom halben Quersinus x, wenn der Halbmesser $= r$ ist oder

$arfrdx\,x^{-\frac{1}{2}}(r-x)^{-\frac{1}{2}} = ar(\text{arc: 2 quers.x})$ und

$brfdx\,x^{-\frac{1}{2}}(4r-x)^{-\frac{1}{2}} = br(\text{arc: }\frac{1}{2}\text{ quers. x})$

Den Satz vierten und fünften so integrirt, giebt änliche Formeln, wo der Quersinus durch u bezeichnet ist.

$crfrduu^{-\frac{1}{2}}(r-u)^{-\frac{1}{2}} = cr(\text{arc: 2 quers. u})$ und

$erfrduu^{-\frac{1}{2}}(4r-u)^{-\frac{1}{2}} = er(\text{arc: }\frac{1}{2}\text{ quers. u})$

Weil

Weil in den Sätzen $fdF = f\int(r^2 - rx)^{\frac{1}{2}} r\,dx.$ $(rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $gdG = g\int(r^2 - ru)^{\frac{1}{2}} r\,du(4ru - u^2)^{-\frac{1}{2}}$. $h\int(r^2 - rx)^{\frac{1}{2}} r\,dx(4rx - x^2)^{-\frac{1}{2}} = hdH$, $kdK = k\int(4r^2 - ru)^{\frac{1}{2}} r\,du(ru - u^2)^{-\frac{1}{2}}$; die Folge oder Reihe der Potenzen der veränderlichen Größen entweder x oder u, welche entsteht, wenn man im Satze den Faktor, dessen Eksponent eine gebrochene negative Zal ist, nach der bekannten BinomialFormel in eine unendliche Reihe entwickelt, deren Glieder alle positiv sind (also auch dies Gesetz der Koeffizienten) im geringsten gar nicht verändert, wenn man diese unendliche Reihe mit der unendlichen Reihe, die sich aus der Entwickelung des andern Faktors mit dem gebrochenen positiven Eksponenten, ebenfalls nach der BinomialFormel, ergiebt, vor der Integration multiplizirt; so leuchtet ein, daß folglich jene ganz positive Folge oder Reihe der Potenzen des veränderlichen x oder u auch nach geschehener Integration derselben durch das Multipliziren mit dieser Reihe, die aus einem ersten positiven und dann lauter negativen Gliedern besteht, in Hinsicht ihrer PotenzenFolge von x oder von u und ihres KoeffizientenGesetzes, im geringsten nicht geändert werden kann: und es ist also ganz einerlei und vielmer bequemer die Multiplikation erst nach und nicht vor der Integration zu verrichten. Oder analütisch ausgedrückt

$ff(4r^2 - rx)^{\frac{1}{2}} r\,dx(rx - x^2)^{-\frac{1}{2}} = f(4r^2 - rx)^{\frac{1}{2}}$. $\int dx r(rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ also $= f(4r^2 - rx)^{\frac{1}{2}}$ arc: 2 quers. x $= fF$. Eben so $g\int(4r^2 - ru)^{\frac{1}{2}} r\,du(ru - u^2)^{-\frac{1}{2}}$ $= g(4r^2 - ru)^{\frac{1}{2}}$ arc: 2 quers. u $= gG$, $hdH = h\int(r^2 - rx)^{\frac{1}{2}} r\,dx(4rx - x^2)^{-\frac{1}{2}} = h(r^2 - rx)^{\frac{1}{2}}$. $\int r\,dx(4rx - x^2)^{-\frac{1}{2}} = h(r^2 - rx)^{\frac{1}{2}}$. arc. $\frac{1}{2}$ quers. x. Eben so $kdK = k\int(r^2 - ru)^{\frac{1}{2}} r\,du(4ru - u^2)^{-\frac{1}{2}}$ $k(r^2 - ru)^{\frac{1}{2}} \int r\,du(4ru - u^2)^{-\frac{1}{2}} = k(r^2 - ru)^{\frac{1}{2}}$. arc: $\frac{1}{2}$ quers. u.

Die Integration dieser acht ersten DifferenzialSätze ist mit wenigern Schwerfälligkeiten als die der acht letztern ver-

verknüpft. Dem Sinne der Paragraphen 6ª, 7ª und 8ª wäre zwar nun nachgelebt, allein so leicht als die §. 9ª und 10ª die Auflösung der übrigen Sätze machen, so schwierig ist sie. — Wollten wir den allgemeinen Betrachtungen in obiger Anmerkung gemäß $dx x^{-\frac{1}{2}} = \beta(\alpha - \beta)^{-1}$. $r^{\frac{\gamma}{2\beta}} u^{\frac{\alpha-2\beta}{2\beta}} du$ und $duu^{-\frac{1}{2}} = \alpha(\beta-\alpha)^{-1} r^{-\frac{\gamma}{2\alpha}}$. $x^{\frac{\beta-2\alpha}{2\alpha}} dx$ ansehen und erstern Wert in die Sätze ldL, ndN, qdQ und tdT; den letztern aber in die Sätze mdM, pdP, qdQ, sdS und zdZ setzen, dann die Faktoren $(r-x)^{\frac{1}{2}}$, $(4r-x)^{\frac{1}{2}}$, $(r-u)^{\frac{1}{2}}$, $(4r-u)^{\frac{1}{2}}$ nach der BinomialFormel jeden in eine unendliche Reihe verwandeln, dann würklich mit den übrigen Faktoren eines jeden Satzes in die Reihe multipliziren und dann gehörig integriren, so würde man erhalten z. B.

$$pP = p\int r\,du\,u^{-\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}} = 2rpr^{-\frac{\gamma}{2\alpha}}\alpha^2(\beta-\alpha)^{-1}.$$

$$\left[r^{-\frac{1}{2}}\frac{x^{\frac{\beta}{2\alpha}}}{\beta} - \frac{r^{-\frac{3}{2}}}{2}\cdot\frac{x^{\frac{\beta+2\alpha}{2\alpha}}}{\beta+2\alpha} - \frac{r^{-\frac{5}{2}}\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^{\frac{\beta+42}{2\alpha}}}{\beta+4\alpha}\right.$$

$$- \frac{r^{-\frac{7}{2}}1.3}{2.4.6}\cdot\frac{x^{\frac{\beta+6\alpha}{2\alpha}}}{\beta+6\alpha} - \frac{r^{-\frac{9}{2}}1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^{\frac{\beta+8\alpha}{2\alpha}}}{\beta+8\alpha}$$

$$\left. + \ldots \text{u. s. w.}\right]$$

$$mM = m\int r\,du\,u^{-\frac{1}{2}}(4r-x)^{\frac{1}{2}} = 2rmr^{-\frac{\gamma}{2\alpha}}\cdot$$

$$\alpha^2(\beta-\alpha)^{-1}\left[(4r)^{-\frac{1}{2}}\frac{x^{\frac{\beta}{2\alpha}}}{\beta} - \frac{(4r)^{-\frac{3}{2}}}{2}\cdot\frac{x^{\frac{\beta+2\alpha}{2\alpha}}}{\beta+2\alpha}\right.$$

$$\left. - \frac{(4r)^{-\frac{5}{2}}1}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^{\frac{\beta+4\alpha}{2\alpha}}}{\beta+2\alpha} - \frac{(4r)^{-\frac{7}{2}}1.3}{2\cdot 4.6}\cdot\frac{x^{\frac{\beta+6\alpha}{2\alpha}}}{\beta+6\alpha}\right.$$

$$- \frac{(4r)^{-\frac{3}{2}}\,1.3.5}{2\,.\,4.6.8}\cdot\frac{x^{\frac{\beta+8\alpha}{2\alpha}}}{\beta+8\alpha} + \text{u. s. w. u. s. w.}]$$

$$sS = s\int r^{\frac{1}{2}}\,du\,u^{-\frac{1}{2}}(4r-x)^{\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}} = 2r^{-\frac{1}{2}}s.$$
$$(4r-x)^{\frac{1}{2}}P = 2r^{-\frac{1}{2}}s(r-x)^{\frac{1}{2}}M$$

$$zZ = z\int r^{\frac{1}{2}}x\,du\,u^{-\frac{1}{2}} = z\int r^{\frac{\alpha-\gamma}{2\alpha}}x^{\frac{\beta}{2\alpha}}\,dx\,\alpha(\beta-\alpha)^{-1}$$
$$= zr^{\frac{\alpha-\gamma}{2\alpha}}x^{\frac{\beta+2\alpha}{2\alpha}}\,2\alpha^2(\beta-\alpha)^{-1}(\beta-2\alpha)^{-1}$$

Um die Sätze lL, nN, qQ und tT zu erhalten, muß man nur in Vergleich auf pP, mM, sS und zZ hier statt setzen u für x, $+\gamma$ für $-\gamma$, α für β und β für α und man erhält die erforderlichen änlichen Integrale für änliche Differenziale, z. B. nur

$$nN = 2nrr^{\frac{\gamma}{2\beta}}\beta^2(\alpha-\beta)^{-1}\left[r^{-\frac{1}{2}}\frac{u^{\frac{\alpha}{2\beta}}}{\alpha} - \frac{r^{-\frac{3}{2}}}{2}\cdot\frac{u^{\frac{\alpha+2\beta}{2\beta}}}{\alpha+2\beta} - \frac{r^{-\frac{5}{2}}.1}{2\,.\,4}\cdot\frac{u^{\frac{\alpha+4\beta}{2\beta}}}{\alpha+4\beta} - \frac{r^{-\frac{7}{2}}.1.3}{2\,.\,4.6}\cdot\frac{u^{\frac{\alpha+6\beta}{2\beta}}}{\alpha+6\beta} - \frac{r^{-\frac{9}{2}}.1.3.5}{2\,.\,4.6.8}\cdot\frac{u^{\frac{\alpha+8\beta}{2\beta}}}{\alpha+8\beta}\ \text{u. s. w.}\right]$$

$$lL = 2lrr^{\frac{\gamma}{2\beta}}\beta^2(\alpha-\beta)^{-1}\left[(4r)^{-\frac{1}{2}}\frac{u^{\frac{\alpha}{2\beta}}}{\alpha} - \frac{(4r)^{\frac{3}{2}}}{2}\cdot\frac{u^{\frac{\alpha+2\beta}{2\beta}}}{\alpha+2\beta} - \frac{(4r)^{-\frac{5}{2}}.1}{2\,.\,4}\cdot\frac{u^{\frac{\alpha+4\beta}{2\beta}}}{\alpha+4\beta} - \frac{(4r)^{-\frac{7}{2}}.1.3}{2\,.\,4.6}\cdot\frac{u^{\frac{\alpha+6\beta}{2\beta}}}{\alpha+6\beta} - \frac{(4r)^{-\frac{9}{2}}.1.3.5}{2\,.\,4.6.8}\cdot$$

u.

$\frac{u^{\frac{\alpha+8\beta}{2\beta}}}{\alpha+8\beta} + u.$ [f. w.]; $qQ = 2r^{-\frac{1}{2}}q(4r-u)^{\frac{1}{2}}$.

$N = 2r^{-\frac{1}{2}}q(r-u)^{\frac{1}{2}}L$; $tT = tr^{\frac{\beta+\gamma}{2\beta}}u^{\frac{\alpha+2\beta}{2\beta}}$.
$2\beta^2(\alpha-\beta)^{-1}(\alpha-2\beta)^{-1}$.

Jedoch wie zu allgemein und unbestimmt sind diese Integral-Sätze in Bezug auf die vorigen achte und auf die Aufgabe selbst, da das ganze Integral einen Flächen-Inhalt ausdrücken soll, wie aus dem Ganzen einleuchtend zu seün scheint.

Es sagt aber Pedrayes im Satze 9a und 10a ganz bestimmt, daß diese acht letzten Sätze die Differenzial-Formeln für krummlinichte Flächen deutlich enthielten und leicht durch ihre rücksichtlich gemeinschaftlichen Abszissen $= \pm (rx)^{\frac{1}{2}}$ und $= \pm (ru)^{\frac{1}{2}}$ die senkrechte Koordinate y und v in jedem Satze bestimmt würde. Es ist aber $r^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx = 2dy$ und $r^{\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du = 2dv$ integrirt man, so ist $\int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} = 2r^{-\frac{1}{2}}y$ nnd $\int u^{-\frac{1}{2}}du = 2u^{\frac{1}{2}} = 2r^{-\frac{1}{2}}v$. Dies auf jene Sätze angewandt $lL = r\int x^{-\frac{1}{2}}dx(4r-u)^{\frac{1}{2}}$, $2lrx^{\frac{1}{2}}(4r-u)^{\frac{1}{2}}$, $nN = 2nrx^{\frac{1}{2}}(r-u)^{\frac{1}{2}}$, $qQ = 2qr^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}(4r-u)^{\frac{1}{2}}$. $(r-u)^{\frac{1}{2}}$, $tT = 2tu(rx)^{\frac{1}{2}}$; $mM = 2mru^{\frac{1}{2}}$. $(4r-x)^{\frac{1}{2}}$, $pP = 2pru^{\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}}$; $sS = 2s(ru)^{\frac{1}{2}}$. $(4r-x)^{\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}}$, $zZ = 2zx(ru)^{\frac{1}{2}}$.

Lauter unvollständige Integrale eigentlich, wie ich oben gezeigt habe, sollen da blos in Hinsicht der einen Größe integrirt werden, wie man ausdrücklich zu verlangen scheint.

Das ganze Integral wäre also:

$Y = [ar + f(4r^2 - rx)^{\frac{1}{2}}]$. [arc:(2quers:x)] + $[br + h(r^2 - rx)^{\frac{1}{2}}]$. [arc:($\frac{1}{2}$quers:x)] + $[cr + g.(4r^2 - ru)^{\frac{1}{2}}]$. [arc:(2quers:u)] + $[er + k.(r^2$

$(r^2 - ru)^{\frac{1}{2}}].[\text{arc:}(\frac{1}{2}\text{quers:u})] + 2lrx^{\frac{1}{2}}(4r-u)^{\frac{1}{2}}$
$+ 2nrx^{\frac{1}{2}}(r-u)^{\frac{1}{2}} + 2q(rx)^{\frac{1}{2}}(4r-u)^{\frac{1}{2}}(r-u)^{\frac{1}{2}}$
$+ 2tu(rx)^{\frac{1}{2}} + 2mru^{\frac{1}{2}}(4r-x)^{\frac{1}{2}} + 2nru^{\frac{1}{2}}.$
$(r-x)^{\frac{1}{2}} + 2q(ru)^{\frac{1}{2}}(4r-x)^{\frac{1}{2}}(r-x)^{\frac{1}{2}} + 2zx.$
$(ru)^{\frac{1}{2}}.$

Es soll nun Y verschwinden, wie x oder u verschwinde, so wollen wir auch setzen zuvörderst $x = o$, so sind auch die Bögen $= o$, von denen x der ganze, halbe, oder doppelte Quersinus war und sie durch ihn bestimmt waren. Dann erhalten wir folgende Gleichung $o = (cr + g.$
$(4r^2 - ru)^{\frac{1}{2}})\text{arc:}(2\text{quers.u}) + (er + k(r^2 - ru)^{\frac{1}{2}}).$
$\text{arc:}(\frac{1}{2}\text{quers:u}) + 2r(ru)^{\frac{1}{2}}[2m + n + 2q]$
Folglich müssen auch hier der Quersinus u und die sich aus ihm ergebenden Bögen $= o$ seün; und alles eben so wenn umgekert von $u = o$ zuerst ausgegangen wird.

Ist $x = r$ und $\pi =$ der halben Peripherie, so wird aus obiger Gleichung die folgende

$Y = [ar + fr3^{\frac{1}{2}}]\pi + br[\text{arc:}(\frac{1}{2}\text{quers.u})] +$
$[cr + g(4r^2 - ru)^{\frac{1}{2}}].[\text{arc:}(2\text{quers.u})] + [er$
$+ h(r^2 - ru)^{\frac{1}{2}}].[\text{arc:}(\frac{1}{2}\text{quers.u})] + 2lr(4r^2 - ru)^{\frac{1}{2}}$
$+ 2nr(r^2 - ru)^{\frac{1}{2}} + 2qr(4r-u)^{\frac{1}{2}}(r-u)^{\frac{1}{2}}$
$+ 2tru + 2mr(3ru)^{\frac{1}{2}} + 2zrx.$ Wäre auch $u = r$, so wird sich dieser in den folgenden Ausdruck verwandeln $Y = r\pi(a + f3^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}br\pi + r\pi(c + g3^{\frac{1}{2}})$
$+ \frac{1}{3}er\pi + 2r^2 3^{\frac{1}{2}}(l + m) + 2r^2(t + z)$
$= \frac{1}{3}r\pi(3a + b + 3c + e + f3^{\frac{3}{2}} + g3^{\frac{3}{2}})$
$+ 2r^2(t + z + l3^{\frac{1}{2}} + m3^{\frac{1}{2}})$

Und ist $a = b = c = e = f = g = l = m = t$
$= z$, so ist $\frac{1}{3}tr\pi(8 + 6.3^{\frac{1}{2}}) + 4tr^2(1 + 3^{\frac{1}{2}}) = Y$
Und da kein Grund im Zirkel und in der ganzen vorauszusetzenden Figur vorhanden zu seün scheint, daß Y außer von r, x und u annoch von einer oder von merern andern

Grö-

Größen bestimmt würde, so sind alle Koeffizienten = 1 zu setzen: und $Y = 4r(r + \frac{2}{3}\pi) + (4r^2 + 2r\pi)3^{\frac{1}{2}}$. Ob $x = u$ oder $= -u$ oder $x^{\frac{1}{2}} = -u^{\frac{1}{2}}$ mag ich hier nicht entscheiden, doch scheint es aber auf das deutlichste aus dem Problem und dessen möglicher Auflösung einzuleuchten. Es konnte auch x = der Sinus oder Quersinus vom Bogen u oder umgekert seün, x die Tangente von einem Bogen, wenn u der Sinus oder Quersinus wäre oder umgekert.

Es verlont sich der Zeit und Mühe nicht, weitere und tiefere Nachforschungen über Sinn und Möglichkeit dieser rätselhaften Aufgabe one alle Figur aus der unbestimmten geometrischen Analüsis anzustellen. Ich schließe also diese Abtheilung, da sie ihre jetzige Bestimmung erfüllen wird und um jenen Preiß umsonst stehen würde.

Not-

Notwendige

Theorie und Entstehung

der

UrrechnenLere oder Analüsis, Algebra,

der

Einungs- und Sonderungslere, oder Kombinationslere

und der

besondern Arithmetiken oder ZalenSüsteme.

Fünfte Abtheilung des Ganzen.

Warhafte

Theorie und Entstehung

der

Arithmetik oder ZalenLere überhaupt,

d. h.

Algebra, Urrechnenlere

und jeder

Arithmetik oder jedes ZalenSüstems

insbesondere.

Der Mensch findet und setzt für sein Wissenschaffen — *) schlechthin in, mit und durch seine Bewußtwerdung sich als Einzelnheit und entgegen Einzelnheiten: mit der Bewußtseüung ist auch die erste und absoluteste Thei-

*) Anmerk. Das Wissenschaffen oder das Heraustreten des UrEinen aus seiner AllEinheit und Werden zu (Differenzen und Indifferenzen,) Einzelnheiten; das Finden und Setzen seiner selbst und entgegengesetzter Einzelnheiten schlechthin sind zugleich und notwendig wechselseitig sich bedingend. Kein SelbstBewußtwerden und -seün one ein zugleiches Bewußtwerden und -seün (vom Du und) von den Dingen; oder mithin, one absolute (Zweiheit, Dreiheit, Merheit und) Vielheit der Einzelnheiten und Auffassen aller unter die Einerleiheit, Allheit und umgekert. Diese nicht one Jenes. (Kein Begränzen one sich wechselseitig zugleich Begränzende, Begränzte und zu Begränzende, also one Begränztheiten und umgekert.)

Theilung und Einung (in zwei und in drei Theile und somit die) in merere Theile und die in viele Theile geschaffen, geschehen, und umgekert, wie nur dieses Theilen Statt findet, findet erst Bewußtseün Statt. Einzelnheiten sind sich nie absolut gleich und absolut ungleich oder entgegengesetzt, weil hier kein Vergleichen und Beziehen jemals möglich ist oder eintreten kann, sie wären hier offenbare Widersprüche, Ungereimtheiten: — Nur inwiefern sie (Einzelnheiten) in Diesem hier bedingt gleich und in Jenem dort bedingt ungleich oder entgegengesetzt sind, insofern sind sie erst das, was sie denn würklich sind, — — Einzelnheiten. Wenn und wiefern der Mensch diese und jene Einzelnheit unter einander vergleicht, auf einander bezieht, auf sie noch eine und dann noch eine und zu diesen noch eine u. s. w. und umgekert diese auf die ersten bezieht, oder allgemein eine oder merere Einzelnheiten auf eine oder merere bezieht: so und sofern findet und setzt er zugleich sie in gewissem Betrachte einander ungleich, keine der andern oder dritten gleich, er sondert sie alle gänzlich als besondere Einzelnheiten; und dennoch setzt er sie auch in einer und ebenderselben Handlung, als Einzelnheiten überhaupt, unter sich gleich, identisch und dann sammelt er sie. — Hier entsteht dem Menschen der Begriff vom Zälen, von Zälenden, Gezälten, und Zuzälenden, d. i. von (Zälenheit oder besser von) Zal, von Zälung. Der Mensch zält eben so absolut als er weset, weiß und ist, — one sich freilich des Zälens als solches sogleich deutlich bewußt zu werden. Jede Einzelnheit, Thier, Pflanze oder was es seü, das da weset und das einwürket und auf sich einwürken läßt, zält Einzelnheiten, doch unbestimmt und dunkel fülend, one Bewußtseün seines ZälungsAktes oder seines Zälens.

Der Mensch als allein wissenschaffendes zält also und zwar VorzugsWeise zält er, erzält Einzelnheiten. Erst unvorsätzlich und dann vorsätzlich und hier, wo und wie er von jenem zu diesem Zälen übergeht, wird er erst seines Zälens bewußt. Der Mensch zält nicht blos wie jede Thierheit, sondern vorsätzlich; er bildet gleichsam wiedererschaffend wissenschaffend das Zälen, die Zalen (in Nuce), er zieht alles ans Licht hervor, er vorzält. — Er wissenschaft das vom Absoluten gewesenschafte Zälen. —

Allein

Allein wie macht er es dann? Wie wissenschaft er Zalen? Selbstseüend Eine Einzelnheit, Zal, setzt, sammelt er zu Einer Einzelnheit noch eine, dann zu diesen beiden noch eine, zu diesen noch eine und sofort setzt er zu allen vorhergehenden immer nach und nach noch eine Einzelnheit. Er geht auch weiter und vorbildet sich Eine solche Einzelnheit unter dem natürlichen Bilde oder Vorbilde |, (einen senkrechten Strich) und setzt also immer äußerlich oder sinnlich durch ein sichtbares SinnBild und eben so in der Vorbildung oder Idee einen | zu dem oder zu den vorigen. Er kann dies ins Unbestimmte oder Unendliche fort thun, der Möglichkeit nach, jedoch nie in der Würklichkeit, wo er ein Mal stille stehen muß, wo und bei welcher Zal von 1 es auch seü. Vom Stillestand oder von der Ruhe-Zal an gehet er auch wiederum rückwärts und so nimmt er immer eine Einzelnheit nach der andern nach und nach weg, er sondert eine nach der andern ab. Er zält jetzt im Gegensatz des vorigen Zälens negativ, wie er zuvor positiv zälte. [Er zält eigentlich auch positiv, wenn er negativ zält und umgekert, er zält eigentlich positiv und negativ zugleich oder vielmer, er zält schlechthin. Es kommt alles auf den AusgangsPunkt an, denn wenn er zu einer Einzelnheit andere hinzuzält, so zält er vom Totum oder Ganzen eine nach der andern zurück und umgekert. Die positive wie die negative ZalenReihe wissenschaft er zugleich keine vor der andern. —]

Zälen kann er aber ins Unbestimmte und Unendliche fort, one daß er dennoch einen deutlichen, scharfen Begriff von dem Ganzen oder von der bestimmten Menge der Einzelnheiten hat, die als Theile das Ganze miteinbilden, ausmachen, konstruiren. Er sieht sich jedes Mal genötigt, dasselbe Geschäfte des Hinzuthuns einer zu einer Einzelnheit und zu den vorigen ganz von Anfang zu wiederholen, dieselbe Handlung von Neuem zu wiederholen, wie er einen Begriff von seiner bestimmten Zal Einzelnheiten sich und andern zu geben bemüht ist. Notgedrungen that er also einen Schritt weiter. Wie der Mensch eine Einzelnheit zu einer Einzelnheit und so zu jeder vorigen Zal von Einzelnheiten immer wieder Eine hinzufügt, so bezeichnet er jegliche dadurch entstehende Zal von Einzelnheiten nach der Folge mit einem Zeichen oder Bilde und schaft auch wol für ein jedes dieser Bilder Ein Wort, ein hörbares Bild und — (ob und analog dieser bedingten

einbildlichen Einheit auch ein einsülbiges Wort —) so drückt er nach und nach jede Zal durch ein besonderes (sichtliches) Bild und durch ein besonderes einsülbiges Wort (hörbares Bild) aus. —

Neben dieser SinnBildung bestimmter Mengen von Einzelnheiten nach einander, entsteht ihm in ihm zugleich das SinnBilden der unbestimmten zu bestimmenden Mengen von Einzelnheiten unter willkürliche allgemein gültige SinnBilder oder Karaktere, z. B. unter Buchstaben. Allein wollte er auf diese Weise fortfaren, was er jedoch gar nicht im Stande ist, so würde seine LebensZeit nicht hinreichen, alle diese Bilder und Worte dafür kennen zu lernen und dem Gedächtnis einzuprägen; es würde ihm wie den Chinesen mit ihrer SchriftSprache ergehen. — Der Mensch muß also, dieser unendlich fortsetzbaren Bestimmtheit wegen, auch hier irgendwo bald abbrechen und aufhören für jede folgende neue Zal (oder Anzal Einzelnheiten) ein besonderes einfaches Bild und besonderes (einsülbiges) Wort zu entwerfen. Noch einen Schritt in der Besonderung weiter zu thun ist er genüssigt und, zum Ausdruck immer größerer und größerer Zalen dasselbe Bild und Wort oder dieselben Bilder und Worte unter gewissen festen Bedingungen zu wiederholen. Ihre höhern oder andern Werte, die sie dadurch erlangen, muß er jedoch kenntlich machen, und dies kann er nur durch Abänderung ihrer Stellungen, Lage oder Folge. Eine auf die Weise vorgestellte Zal wird ihm gleichsam eine Einzelnheit höherer Ordnung. Jetzt beginnt er von Neuem zu Einer solchen Einzelnheit höherer Ordnung eine und merere erste Einzelnheiten hinzuzufügen, sie mit Worten und Bildern auszudrücken, die er aus den vorhandenen auch wol zusammensetzt. Jedoch muß er wiederum irgendwo abbrechen, weil auch dies so ins unbestimmte willkürliche fortgehen würde. Nach dieser Abbrechung beginnt er von Neuem ein änliches Verfaren, — allein gezwungen oder gedrungen bricht er abermals unbestimmt irgendwo von Neuem ab, und beginnt so willkürlich immer das änliche Verfaren. Hier endlich bemerkt er, daß er höchst unbestimmt und Gesetzlos zäle und für die Zalen Bilder und Worte bilde, wodurch auch jetzt noch seinem Gedächtnisse eine schwere Aufgabe alles zu merken und zu behalten gegeben wird, die seine Kräfte übersteigt. Er fült die drückende Ungleichförmigkeit im Abbrechen und Bezeichnen seiner Einzelnheiten

ten höherer Ordnung. Er fällt darauf, die Bilder und Worte der einfachen Zalen oder der Zalen von Einzelnheiten der niedern oder nullten Ordnung nach ein bischen Analogie oder änlicher Folge auch in der höhern Ordnung zu wiederholen oder gelten zu lassen. Jedoch waltete im ganzen Zälen noch immer eine gewisse Ungleichförmigkeit durch ein unregelmäßiges Abbrechen und Bezeichnen der Zalen zu Einzelnheiten höherer Ordnung. Und so war das Zälen der ältesten Griechen, Phönizier u. s. w. beschaffen.

Endlich that man einen großen Schritt vorwärts, zu einer gleichförmigen stetigen Abbrechung im Bestimmen von Einzelnheiten immer höherer Ordnung schritt man jetzt, schränkte die Bilder und Worte auf eine bestimmte Anzal ein und bezeichnete die Zalen nach einander durch die besondere geregeltere Folge oder Stellung und durch die Stellen der Einzelnheiten höherer und niederer Ordnung nach einander in der Idee (Vorbildung) und eben so auch ihrer Karaktere und Worte dafür. — Allein one Prüfung des Bessern tappte man geradezu auf die eine oder die andere Anzal Bilder, höchst zufrieden endlich eine gewisse Gleichförmigkeit zu besitzen, unbekümmert, ob es auch die bequemere oder die bequemste unter den möglich zu wälenden Gleichförmigkeiten seü. Ein kleiner nichtiger Umstand bestimmte öfters alles, bestimmte die Zal von Einzelnheiten, die eine höhere bilden sollte. —

In Worten hatte man sie, jene willkürliche Gleichförmigkeit, auch wol schon und selbst in der BilderFolge mangelte dennoch sie noch lange Zeit; man erinnere sich der griechischen und der römischen ZälWeise und ZiffernFolge.

Anmerkung. Die römische Zalenkere ist in Hinsicht der ZiffernSchrift ein warer Zwitter von Pentadik, Düadik und Dekadik, oder von pentadischer Düadik und düadischer Pentadik. Denn beim Kolligiren oder Sammlen, Einen von Einzelnheiten niederer Ordnung zu jedwelcher höherer Ordnung verfärt man abwechselnd pentadisch und düadisch. Zuvörderst kolligirt man bei den fünf primitiven Einzelnheiten zu einem Bilde von Einzelnheiten höherer Ordnung, jetzt so bald man von diesen zwei hat, wird sogleich wieder ein Bild höherer Ordnung dafür konstruirt, gewönlich aus zwei einfachen sich entgegengestellten Fünfbildern. Fünf nun dieser DoppelEinheiten geben dann wieder eine höhere Einzelnheit unter Einem neuen Bilde. Hierauf

auf zwei von diesen abermals eine DoppelEinzelnheit unter Einem Bilde, das aus zwei einfachen sich entgegengewandten gebildet ist. u. s. w.

Fünf I = V, zwei V = X = $\overset{V}{\Lambda}$, fünf X = ⋁/ = ↳, zwei L = ⌊ = C, fünf C = Ↄ = D = IↃ, zwei D oder IↃ = ↀ = M oder cIↃ, fünf M oder cIↃ = IↃↃ, zwei IↃↃ = ccIↃↃ, fünf ccIↃↃ = IↃↃↃ, zwei IↃↃↃ = ccclↃↃↃ, fünf ccclↃↃↃ = IↃↃↃↃ, zwei IↃↃↃↃ = ccccIↃↃↃↃ eine Million u. s. w.

"Die Griechen (wie die Hebräer) bedienten sich ih„res Alphabets auch zu ZalZeichen; schalteten aber, „um auszureichen, nach dem ε noch das ϛ, und nach dem „π und dem ω noch zwei andere SchriftZüge ein, die „aber in unsern gewönlichen Druckereien nicht mer vor„handen sind. [Diese drei ZalZeichen (wovon das erste „nur zufällig mit der neuern Abbreviatur ϛ übereinkommt) „sind eigentlich auch Buchstaben eines veralteten Alpha„bets]." Alle haben zum KennZeichen oben einen Strich, auf diese Art: die Tausende fangen wieder von α an, aber mit einem Strich links unten.

Arabische, altgriechische und römischgriechische Ziffern- oder ZalenSchrift.

1	α′	I	50	ν′	$\overline{\vert\Delta\vert}$
2	β′	II	60	ξ′	$\overline{\vert\Delta\vert}\Delta$
3	γ′	III	70	ο′	$\overline{\vert\Delta\vert}\Delta\Delta$
4	δ′	IIII	80	π′	$\overline{\vert\Delta\vert}\Delta\Delta\Delta$
5	ε′	Π	90	ϟ′	$\overline{\vert\Delta\vert}\Delta\Delta\Delta\Delta$
6	ϛ′	ΠI	100	ρ′	H
7	ζ′	ΠII	200	σ′	HH
8	η′	ΠIII	500	φ′	$\overline{\vert H\vert}$
9	ϑ′	ΠIIII	900	ϡ′	$\overline{\vert H\vert}$HHHH
10	ι′	Δ	1000	,α	X
11	ια′	ΔI	2000	,β	XX
19	ιθ′	ΔΠIIII	5000	,ε	$\overline{\vert X\vert}$
20	κ′	ΔΔ	6000	,ϛ	$\overline{\vert X\vert}$X
30	λ′	ΔΔΔ	10000	,ι	M
40	μ′	ΔΔΔΔ	50000	,ν	$\overline{\vert M\vert}$

Ja

Ja die Geschichte der alten germanischen Völker-Stämme zeigt es zu bestimmt, daß man in Worten und Begriffen die vollkommenste ZälWeise besaß, one das geringste von einer Sümbolik dafür zu kennen; wie die Sümbolik unter ihnen von andern Völkern eindrang, ward auch die vollkommenste Zäl- und RechnenWeise (nach Dutzenden) verdrängt. — Die Form siegte über die Wesenheit. —

Wann dann eigentlich die Menschheit im Drange nach Einfachheit und Nettigkeit jenen großen, mächtigen Schritt that, der eben so merkwürdig als einzig in seiner Art ist, und von den ehedem so unternemenden Arabern gethan worden seŭ, daß sie glaubte, jede erste Einzelnheit höherer Ordnung durch das Bild der ersten primitiven Ordnung unter gewissen Bedingungen ausdrücken zu müssen, — wissen wir nicht genau auf das Jar zu bestimmen, genug ein Mönch, Planudes genannt, soll im MittelAlter im XIII. Jarh. der Apoſtel dieser vereinfachten Ziffern oder BilderSchrift für die Dekadik in Europa gewesen seŭn.

Genug die That war da, man bezeichnete endlich die Folge von 1 anfangender Zalen von Einzelnheiten bis zu einer gewissen Zal blos mit einfachen Bildern, Ziffern und sprach sie durch meist einsülbige Worte aus. Jene ZalEinzelnheiten, die man zuerst als eine Einzelnheit oder Einheit höherer Ordnung, oder als Basis, GrundZal angesehen wissen wollte, bezeichnete man ser natürlich durch 10 d. h. durch 1 und eine Rechts angefügte Null 0; einer Ziffer, die allein und als solche, nie einen Wert oder eine Zal so sinnvoll ausdrückt, als vielmer den Mangel aller Einzelnheiten an der Stelle anzeigt und die nur dazu dient, durch ihre Stellung und Wiederholung hinter den übrigen einfachen ZalZeichen oder Ziffern deren Werte zu erhöhen, — so wie Gegentheils zu erniedrigen, wie sie hinter einem sogenannten EinerKomma solche immer weiter um eine Stelle davon wegdrängt.

So wie man eine Einzelnheit der primitiven Ordnung oder 1 zu jener eben gesetzten Einzelnheit höherer Ordnung hinzufügte, nam man jene, blos Stellen ausfüllende Ziffer, die 0 weg, und setzte die 1 an ihre Stelle, und erhielt 11; und setzte man nach und nach die übrigen einfachen Ziffern an die Stelle der 0, wie man nach und nach auch eben so viele Einzelnheiten prim. Ordnung zur Basis oder zur ersten Einzelnheit höherer Ordnung hinzugefügt hatte, bis man von Neuem eine solche gesammelt hatte; jetzt wurde

die

die 1 in der ersten Stelle linker Hand vor der o in der Basis weggenommen und die nächste einfache Ziffer nach ihr, an ihre Stelle gesetzt.

Alsdann begann man auch hier die o in der ersten Stelle Rechts wiederum wegzunemen und erst die 1 und so, nach und nach, alle festgesetzten einfachen Ziffern in ihrer Ordnung an ihre Stelle zu setzen, wie man nach und nach eben so viele Einzelnheiten primitiver Ordnung oder einzifferiger Zalen hinzuzälte, als jede einfache Ziffer jedesmal ausdrückt: bis man wiederum eine Einzelnheit höherer Ordnung zusammen hatte und deswegen die Ziffer in der nächst höhern Stelle wegthat und ihre nächst größere Nachbarin an die Stelle setzte, den vorigen ZirkelGang von Neuem begann, als man gerade eben so viele Einzelnheiten höherer Ordnung gesammelt oder gezält hatte, als primitive Einzelnheiten zu einer höhern gehörten. Hier kolligirte man von Neuem unter einer Einheit oder Einzelnheit höherer Ordnung, die man natürlich und richtig durch — 100 — ausdrückte.

Den so eben zum 1ten Mal geschlossenen größern ZirkelGang begann man von Neuem und setzte an die Stelle der letzten o rechter Hand und in richtiger Folge auch an die Stelle der andern o alle vorhergehenden Zalen wie sie sich folgen und in dieser Folge hinzugezält werden; bis man auch wieder auf die Einheit der zuletzt gesetzten höhern Ordnung kömmt, jetzt wird wie beim vorigen kleinern ZirkelGang die 1 aus ihrer Stelle vertrieben durch die nächste Zal oder einfache Ziffer. Auch hier wird nach jedesmaliger Vollendung des hier größten ZirkelGanges von Zalen die kleinere einfache Ziffer in der äußersten Stelle linker Hand durch die nächste größere Ziffer vertrieben und so nach gerade alle, so daß, ehe man es sich versieht, der erste noch größere ZirkelGang vollendet ist und man eine neue Einzelnheit von einer noch höhern Ordnung als alle vorigen, alles kolligirend bildet, wodurch die 1 noch um eine Stelle nach der Linken hinaus durch lauter nachfolgende o oder Ziffern gerückt wird, oder man erhält — 1000 —. Man zält analog dem Vorigen und in analogen nur größern ZirkelGängen so lange fort, bis auch hier die 1 und jede der folgenden nächst größern Zalen oder alle einfachen Ziffern sich nach der Folge aus der äußersten Stelle verdrängt haben, und dadurch die 1 immer weiter hinaus

nach der Linken zu rückt und so immer in änlichen erweiterten Kreißen fort.

Diese so bezeichnete Zal 10 oder Einheit erster höherer Ordnung ward dann die GrundZal, Basis des Ganzen und durch die gleichförmige oder stetige Wiederholung dieser kolligirenden Bezeichnung der gleichen AnzalEinheiten höherer Ordnung zu Einer Einzelnheit noch höherer Ordnung, sie ward Basis des großen Ganzen oder des ZalenSüstems. —

[Hier endlich bemerkt er von der Liuken zur Rechten hin geschlossen, daß er linker Hand eine Einzelnheit aus 10 nächst kleinern Einzelnheiten niederer Ordnung bestehen lassen und eintheilen kann, jede von diesen wiederum aus 10 Einzelnheiten noch niederer Ordnung, mithin die erste aus 100 Einzelnheiten einer 2ten niedern Ordnung u. s. w. in einer immer 10mal größern Zal von immer 10mal kleinern Einzelnheiten theilen oder bestehen lassen kann, wo er der Analogie nach für die Einheit selbst der niederern Ordnungen sukzessive die folgenden Bezeichnungen setzt 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 u. s. w. setzt.

Jetzt zeigt eine kleine Ueberlegung oder auf den ersten Blick ist es einleuchtend, daß es der Willkür des Menschen ganz anheim gestellt bleibt, wann und wo er jene — oben von uns konstruirte — ins Unbestimmte fortzusetzen mögliche Bezeichnung der Zalen von Einzelnheiten durch einfache Bilder oder durch Ziffern und sie aussprechende Worte abbrechen, und die erste Einzelnheit höherer Ordnung bilden oder schaffen kann, oder welche Zal von Einzelnheiten er als Basis oder GrundZal seines (bestimmten) ZalenSüstems festsetzen (fikfiren) und unter dem relativ absoluten Bilde — 10 — fassen kann und will: Entgehen hätte es einem etwas weiter zu Denken gewonten Kopfe gewiß nicht dürfen, daß es sonach so viele ZalenSüsteme geben, oder er deren so viele wissenschaffen könne, als es Anzalen von primitiven Einzelnheiten giebt, die er als eine höhere fikfiren, als Basis setzen kann: — folglich sind unzälig viele ZalenSüsteme möglich; allein nie alle in diesem Leben wissenschafbar, was auch ganz unnötig, ja ganz zwecklos und höchst schwierig wäre.

Es ist schon genug, daß er die für den Verstand noch faßbaren sich wissenschaft und eines jeden Eigenthümlichkeiten und vollkommenern Eigenschaften vor den übrigen etwa aufsucht und wissenschaftlich ergründet, wodurch der Begriff

griff und das Ganze der allgemeinen Arithmetik überhaupt und die Regeln ihm werden, wodurch sich ihm die Idee eines vor allen übrigen vollkommenern ZalenSüstem aufdringt. Daß er aber sogleich nach diesem vollkommensten unter ihnen allen notwendig fragt; es aufsucht und es allen andern vorzieht, — dies ist und sollte ihm von jeher unerläßlichste Pflicht gewesen seün. — Wer sollte nicht bei diesem beschriebenen Sammeln (Addiren sonst genannt) von Einzelnheiten zu immer um 1 größer werdenden Summen oder Zalen oder bei diesem ursprünglichen Zälen bemerkt haben, daß einige Zalen, — wiefern man sie eben als aus gleich großen Einzelnheiten geeinte Ganze betrachtet — sich schlechterdings nur in so viele gleiche Theile oder erste Einzelnheiten wieder theilen lassen, als aus welchen sie zusammengeeint worden sind, und diese nennt man PrimZalen im Gegensatze der folgenden; — daß aber andere Zalen oder vielmer die übrigen sich nicht blos wie jene in so viele gleiche Theile oder erste Einzelnheiten wieder theilen lassen, als aus welchen sie zusammengefügt worden sind, sondern daß sie auch Theilungen von einer kleinern Anzal gleicher Theile oder rücksichtlicher Einzelnheiten gestatten, davon jegliche wieder eine Gleichtheilung entweder nur in die primitiven Einzelnheiten, oder vor dieser noch eine oder merere Gleichtheilungen in kleinere rücksichtliche relative Einzelnheiten oder Theile erlaubt. Dergleichen Zalen nennt man sekundäre Zalen, Fakten aus den PrimZalen, oder FolgeZalen, welche PrimZalen dann den Namen von Faktoren erhalten und zwar aus irgend je zwei PrimZalen oder aus irgend je drei oder je mereren PrimZalen als Faktoren.

Wie eigentlich der Mensch den Schritt thut, statt stets blos nur eine Einzelnheiti zu sich und zu den vorigen hinzuzuzälen, jetzt deren stets 1 und 1 d. h. zwei oder stets 1 und 1 und 1 d. i. drei oder stets fünf und dergleichen zu derselben und zu den vorigen Zalen hinzuzuzälen, in eben dem Momente entstehen ihm auch die Begriffe vom Gleicheinen und Gleichtheilen (Multipliziren und Dividiren) und Ungleicheinen und Ungleichtheilen (d. h. Addiren und Subtrahiren) aus und in gleiche und aus und in ungleiche Theile, von Fakten und Faktoren, von Prim- und sekundären Zalen; — von Steigern und Wurzeln, d. h. von Potenziren und Wurzelausziehen. — Noch mer, inner und neben jenem Wissenschaffen von etwelchen bestimmten ZalenSüstemen

men parallellaufend werden dem Menschen die Begriffe von einstweilen unbestimmten Mengen von Dingen a, b, c, x, y und dergleichen, vor- und rückläufig, d. h. + oder —, die er bald zu ungleichen Theilen eint, bald zu ungleichen Theilen von einander sondert, bald zu gleichen Theilen vereint, bald zu gleichen Theilen gleichtheilt, bald zu gleichen Theilen und mit denselben Mengen stets mit sich selbst vereint, und endlich bald zu gleichen Theilen oder Wurzeln wiederholt von sich selbst gleichtheilt oder besser diese vereinten gesteigerten potenzirten Mengen oder doch so subsumirten Mengen in ihre Wurzeln rückzerlegt, wurzelt, d. h. ihre Wurzeln auszieht. Und so entsteht mit einem Male ihm die allgemeinste Mengen- (oder Größen)Lere besser RechnenLere, und ihre sechs RechnenArten auch Analüsis genannt. Hier wissenschaft er das Ganze Zäl- nnd RechnenGeschäfte unter höchst allgemeinen Karakteren Sümbolen von unbestimmtem Wert. Er hat sich die RechnenLere, oder MengenLere in abstrakto gebildet und operirt höchst allgemein hier, wo er höchst bestimmt in irgend einem ZalenSüstem mit lauter höchst bestimmten Dingen oder Mengen operirt. Er hat mit der Einzelnheit, mit den Differenzen, der Allgemeinheit der Differenzen, das Universum ergriffen. —

Die Kunst des Entwickelns, Aufsuchens und Bestimmens unbekannter Größen (Geeintheiten) durch andere für gegeben angenommene mittelst der Anwendung seiner sechs Spezies einer bestimmten und der allgemeinen RechnenLere nennt er Algebra. —

Dies selbst aus Spielen und an Spielereien zu gränzen scheinende, höchste und erste Wissenschaffen ist, wenn selbst von der Qualität und Quantität gänzlich hinweggesehen wird, wenn die Dinge als bloße Elemente betrachtet, ihre möglichen Verbindungen zu Zweien, Dreien, Vieren u. s. w., darunter ihre Einungen und Ergänzungen zu bestimmten Summen, und die möglichen Versetzungen der Elemente irgend einer solchen Verbindung oder Einung erwogen, untersucht werden: man nennt diese Wissenschaft die KombinationsLere: man kam auf sie zur Letzt und sie sollte die erste oder die ElementarLere seün; gereinigt von unnützem Geväcke wird sie auch einst zugleich mit den beiden übrigen Zweigen der RechnenLere, der Arithmetik und Analüsis entwickelt, kultivirt und als eine eigene Wissenschaft vorgetragen werden. One Kombinations-

tionslere ist unter andern keine gründliche Wissenschaft von der musikalischen Komposition möglich, sie muß in der Rhythmopöee, Melopöee und Harmopöee und also in der Polyphonie zur GrundHülfslere dienen.

In den Einungen können die Elemente unter einander alle ungleich, oder alle sich gleich oder einige und einige sich gleich, die übrigen ungleich seyn.

Verbündungs- oder Kombinationslere, Arithmetik und Analysis, machen jene Dreieinigkeit der Urrechnenlere; gleich wie diese mit Raumlere und mit der Bewegungslere die Dreieinigkeit in der Mathematik bilden. —

Je nachdem nun die Basis oder die GrundZal 10 des ZalenSystems entweder eine der PrimZalen oder eine der Sekundär Zalen oder Folge Zalen ist, je nachdem gehört das ZalenSystem entweder zum Geschlechte der Prim-ZalenSysteme oder zu dem der sekundären oder FolgeZalenSysteme. —

Wie nun die GrundZal 10 oder die Basis dieser letzten ZalenSysteme ein Produkt (ein Geschaffenes) entweder aus zwei oder aus drei oder vier u. s. w. PrimZalen ist, so gehört das ZalenSystem entweder zur ersten oder 2ten, oder 3ten u. s. w. Gattung von FolgeZalenSystemen. Es können sich aber die PrimZalen, die diese Produkte schaffen, einander gleich oder alle einander ungleich oder nur einige einander gleich oder ungleich seyn, wodurch die Gattungen wieder in besondere Arten zerfallen. — Jedoch werden wir dies alles hier eben sogleich näher kennen lernen und deutlicher begreifen.

Folgende allgemeine kombinatorische oder Elementar-Formen von Einungen und Geeintheiten für die Basen werden die Gattungen und die Arten jeglicher, die vorkommen, richtig bezeichnen, indem a, b, c, d u. s. w. alle möglichen PrimZalen bedeuten. Es kann gleichsam des Zalen-Systems Basis oder GrundZal — oder

10 = a; oder ab; aa; aaa, aab, abc; aaaa, aaab, aabb, aabc, abcd; oder aaaaa u. s w. seyn.

Wenn man die primitive Einzelnheit beständig zu sich selbst zält, so erhält man zuvörderst in natürlicher wachsender Folge die durch einfache Ziffern und einsylbige Worte ausgedrückten, ersten 10Zalen, die GrundZal 10 oder die Basis mit eingerechnet, geht man aber im Zälen, über die Basis hinaus, so heißen die einfachen Ziffern oder 10Zalen als EndigungsZiffern oder EndZalen in derselben natürlichen

chen Folge wie zuvor wieder, und an derselben Ende hat man die GrundZal zu sich selbst einmal gezält; sie diese natürliche Folge der Ziffern oder EndZalen beginnt wieder von Neuem und schließt sich von Neuem und so ferner gleichförmig wiederkerend fort, wie man immerfort die Prim-Einzelnheit zu den vorigen Zalen hinzuzält. Hat man von o an zälend, diese EndZalenFolge 10mal durchwandert, so hat man am Ende die GrundZal 10 auch 10mal zu sich selbst gezält und somit die natürliche Folge der Ziffern auch in der nächsten oder 10nerStelle ein Mal durchlaufen. Und nach 10maliger Durchwanderung dieser natürlichen Ziffern-Folge in dieser 10nerStelle, diese erste mit eingerechnet, hat man eben so 10mal 10mal oder 100mal die Basis 10 zu sich selbst gezält, wie man bei 100 die PrimEinzelnheit 100mal zu sich selbst gezält hatte. u. s. w.

Man kann aber auch gleich die GrundZal 10 zu sich selbst zälen und so erhält man nach und nach 0, 10 (1 + 1). 10, (1 + 1 + 1) . 10, (1 + 1 + 1 + 1) . 10, ... (10 − 1) . 10, 10 . 10, (10 + 1) . 10, (10 + 1 + 1) . 10, u. s. w. (10 + 10) . 10, (10 + 10 + 10) . 10 . . . . (100 − 1) . 10, 100 . 10, (100 + 1) . 10, (100 + 1 + 1) . 10, . . . u. s. w.

Zält man die Zal 10 − 1 oder die Basis weniger 1 beständig zu sich selbst, so durchwandert man die umgekerte rückläufige Folge der EndZalen von 1 bis man von o nach 10maliger Hinzuzälung an die Zal (10 − 1) . 10 kömmt. 10 − 1 + (10 − 1) = 10 + 10 − (1 + 1), (10 − 1) + (10 − 1) + (10 − 1) = 10 + 10 + 10 − (1 + 1 + 1) u. s. w. (10 − 1) mal (10 − 1) = 100 − (10 + 10) + 1 und dazu (10 − 1) + (10 − 1) giebt 100 − 1. Zält man (1 + 1) oder (1 + 1 + 1) oder (1 + 1 + 1 + 1) u. s. w. oder allgemein m PrimEinzelnheiten und m ∠ 10 von o an zu einander, so müssen die EndZalen oder EndigungsZiffern längstens nach 10maliger Zuzälung alle einfache Ziffern durchgelaufen seün und die letzte Zal ist gleich (1 + 1) . 10 oder (1 + 1 + 1) . 10 oder (1 + 1 + 1 + 1) . 10 u. s. w. oder m . 10. Die gerade umgekerte EndigungsZiffern, oder EndZalen Folge durchwandert der Unterschied von 10 und jenen Zalen (1 + 1), (1 + 1 + 1), (1 + 1 + 1 + 1) u. s. w. oder m: d. h. die Zalen 10 − (1 + 1), 10 − (1 + 1 + 1), 10 − (1 + 1 + 1 + 1) u. s. w. oder 10 − m, wenn nämlich jede dieser Zalen wiederholt zu sich selbst gezält wird, so

zei-

zeigen sie die rückläufige Folge in den EndigungsZiffern von ihren Ergänzungen zur Basis. Der Beweis ergiebt sich aus der Sache selbst.

Es ist o, m, m + m, m + m + m, u. s. w. (10 — 1) m, 10. m, (10 + 1) m, (10 + 1 + 1) m die erste EndZiffernFolge; die zweite wird (10 — m) 10, (10 — 1) (10 — m), 100 — (m + 1 + 1) 10 + m + m . . ., (10 + 10 + 10) — (m + m + m), (10 + 10) — (m + m), (10 — m), o.

Zält man rücksichtlich über 10. m und 10 (10 — m) hinaus, so beginnt der erste EndZiffernKreis von Neuem und so jedesmal nach Vollendung eines 10fachen von m oder (10 — m).

Ist aber m irgend eine PrimZal oder eine FolgeZal aus diesen, die als Faktor im Faktum für die GrundZal oder Basis selbst vorkömmt, so besteht seine rücksichtliche KreisFolge aus so viel EndZiffern als aus wie viel PrimEinzelnheiten sein zur Ergänzung der GrundZal erforderlicher Mitfaktor besteht.

Und z. B. wenn die Basis 10 = a b und wiefern m = a, so besteht die rückläufige KreisFolge aus b einfachen EndZiffern, die alle Fakten von a und den ersten b einzifferigen Zalen sind: Basis 10 = a b und m = b ist KreisFolge aus a einfachen Ziffern, alle Fakten von b und den a ersten Zalen; Basis 10 = a a und m = a besteht die KreisFolge aus a einfachen EndZiffern, Fakten von a und den ersten a Zalen. — Erste Gattung von FolgeZalenSüstemen.

2te Gattung von FolgeZalenSüstemen.

1te Art. Ist die Basis 10 = a b c und m = a, so besteht die KreisFolge aus b c EndZiffern, Fakten aus a und den Zalen von 1 bis b c; m = b, KreisFolge aus a c EndZiffern, alle Fakten aus b und den Zalen von 1 bis a c; m = c, KreisFolge aus a b EndZiffern, alle Fakten aus c und den Zalen von 1 bis a b; m = b c, KreisFolge aus a EndZiffern, alle Fakten aus b c und den Zalen von 1 bis a; m = a c, KreisFolge aus b EndZiffern, alle Fakten aus a c und den Zalen von 1 bis b; m = a b, KreisFolge aus c EndZiffern, alle Fakten aus a b und den Zalen von 1 bis c.

2te Art. Ist des Süstems Basis 10 = a a b und m = a, so besteht die KreisFolge aus a b EndZiffern, alle Fakten aus a und den Zalen von 1 bis a b; m = b, KreisFolge aus a a EndZiffern, alle Fakten aus b und den Zalen

len von 1 bis aa; m = ab, KreisFolge aus a EndZiffern, alle Fakten aus ab und den Zalen von 1 bis a; m = aa, KreisFolge aus b EndZiffern, alle Fakten aus aa und den Zalen von 1 bis b.

3te Art. Ist die Basis 10 = aaa und m = a, KreisFolge aus aa EndZiffern, alle Fakten aus a und den Zalen von 1 bis aa; m = aa, KreisFolge aus a EndZiffern, alle Fakten aus aa und den Zalen von 1 bis a.

3te Gattung von FolgeZalenSüstemen.

1te Art. Ist des Süstems Basis 10 = abcd und m = a, so besteht die KreisFolge aus bcd EndZiffern, alle Fakten aus a und den Zalen von 1 bis bcd; m = b, KreisFolge aus acd EndZiffern, alle Fakten aus b und den Zalen von 1 bis acd; m = c, KreisFolge aus abd EndZiffern, alle Fakten aus c und den Zalen von 1 bis abd; m = d, KreisFolge aus abc EndZiffern, alle Fakten aus d und den Zalen von 1 bis abc; m = bcd, KreisFolge aus a EndZiffern, alle Fakten aus bcd und den Zalen von 1 bis a; m = acd, KreisFolge aus b EndZiffern, alle Fakten aus acd und den Zalen von 1 bis b; m = abd, KreisFolge aus c EndZiffern, alle Fakten aus abd und den Zalen von 1 bis c; m = abc, KreisFolge d EndZiffern, alle Fakten aus abc und den Zalen von 1 bis d; m = ab, KreisFolge aus cd EndZiffern, alle Fakten aus ab und den Zalen von 1 bis cd; m = cd, KreisFolge aus ab EndZiffern, alle Fakten aus cd und den Zalen von 1 bis ab; m = bc, KreisFolge aus ad EndZiffern, alle Fakten aus bc und den Zalen von 1 bis ad; m = ad, KreisFolge aus bc EndZiffern, alle Fakten aus ad und den Zalen von 1 bis bc; m = ac, KreisFolge aus bd EndZiffern, alle Fakten aus ac und den Zalen von 1 bis bd; m = bd, KreisFolge aus ac EndZiffern, alle Fakten aus bd und den Zalen von 1 bis ac.

2te Art. Ist des Süstems Basis 10 = aabc und m = a, so besteht die KreisFolge aus abc EndZiffern, alle Fakten aus a und den Zalen von 1 bis abc; m = b, KreisFolge aus aac EndZiffern, alle Fakten aus b und den Zalen von 1 bis aac; m = c, KreisFolge aus aab EndZiffern, alle Fakten aus c und den Zalen von 1 bis aab; m = abc, alle Fakten aus abc und den Zalen von 1 bis a; m = aac, KreisFolge aus b EndZiffern, alle Fakten aus aac und den Zalen von 1 bis b; m = aab,

KreisFolge aus c EndZiffern, alle Fakten aus aab und den Zalen von 1 bis c; m = aa, KreisFolge aus bc EndZiffern, alle Fakten aus aa und den Zalen von 1 bis bc; m = bc, KreisFolge aus aa EndZiffern, alle Fakten aus bc und den Zalen von 1 bis aa; m = ab, KreisFolge aus ac EndZiffern, alle Fakten aus ab und den Zalen von 1 bis ac; m = ac, KreisFolge aus ab EndZiffern, alle Fakten ac und den Zalen von 1 bis ab.

3te Art. Ist des Süstems Basis 10 = aabb und m = aa, so besteht die KreisFolge aus bb EndZiffern, alle Fakten aus aa und den Zalen von 1 bis bb; m = bb, KreisFolge aus aa EndZiffern, alle Fakten aus bb und den Zalen von 1 bis aa; m = ab, KreisFolge aus ab EndZiffern, alle Fakten aus ab und den Zalen von 1 bis ab; m = a, KreisFolge aus ab EndZiffern, alle Fakten aus a und den Zalen von 1 bis abb; m = b, KreisFolge aus aab EndZiffern, alle Fakten aus b und den Zalen von 1 bis baa; m = abb, KreisFolge aus a EndZiffern, alle Fakten aus abb und den Zalen von 1 bis a; m = baa, KreisFolge aus b EndZiffern, alle Fakten aus baa und den Zalen von 1 bis b.

4te Art. Ist des Süstems Basis 10 = aaab und m = b, so besteht die KreisFolge aus aaa EndZiffern, alle Fakten aus b und den Zalen von 1 bis aaa; m = a, KreisFolge aus aab EudZiffern, alle Fakten aus a und den Zalen von 1 bis aab; m = aab, KreisFolge aus a EndZiffern, alle Fakten aus aab und den Zalen von 1 bis a; m = aa, KreisFolge aus ab EndZiffern, alle Fakten aus aa und den Zalen von 1 bis ab; m = ab, KreisFolge aus aa EndZiffern, alle Fakten aus ab und den Zalen von 1 bis aa; m = aaa, KreisFolge aus b EndZiffern, alle Fakten aus aaa und den Zalen von 1 bis b.

5te Art. Ist des Süstems Basis 10 = aaaa und m = a, so besteht die KreisFolge aus aaa EndZiffern, alle Fakten aus a und den Zalen von 1 bis aaa; m = aa, KreisFolge aus aa EndZiffern, alle Fakten aus aa und den Zalen von 1 bis aa; m = aaa, KreisFolge aus a EndZiffern, alle Fakten aus aaa und den Zalen von 1 bis a.

4ter Gattung letzte Art.

Ist des Süstems Basis 10 = aaaaa und m = a, so besteht die KreisFolge aus aaaa EndZiffern, alle Fakten aus a und den Zalen von 1 bis aaaa; m = aa, KreisFolge aus

Folge aus aaa EndZiffern, alle Fakten aus aa und den Zalen von 1 bis aaa; m = aaa, KreisFolge aus aa EndZiffern, alle Fakten aus aaa und den Zalen von 1 bis aa; m = aaaa, KreisFolge aus a EndZiffern, alle Fakten aus aaaa und den Zalen von 1 bis a.

Wäre dagegen zwar m < 10 aber ein Faktum aus zwei Faktoren, wovon der Eine Faktor einer Seits eine PrimZal, oder ein Faktum aus mereren PrimZalen, als Faktor oder als Faktoren auch zugleich in der GrundZal vorkommend, und wovon andern Seits der andere Faktor eine PrimZal oder ein Faktum aus solchen, davon keine zugleich Faktor in der Basis 10, jedoch kleiner als solche ist; Oder m würde zu u.m und m wäre fähig, noch alle die obigen Werte rücksichtlich anzunemen, u aber nicht, und man zälte die Zal u.m beständig zu sich selbst, so durchwandert man eine KreisFolge von eben so viel EndZiffern als bei m und zwar die nämlichen, jedoch nicht in der direkten Folge des Wachsthums dieser durch einfache Ziffern geschriebenen Merfachen wie beim bloßen m, sondern in einer durchbrochenen abwechselnd wachsenden oder ganz durcheinandergeworfenen Folge dieser EndZiffern, indem man den ersten Kreis mit der Zal u.10 schließt: jedoch gehört die gerade verkerte KreisFolge von EndZiffern, von dieser Folge für um der Zal 10 — um jedes Mal zu und sie schließt dagegen mit der Zal (10 — u) 10. Der Erweis liegt deutlich im Obigen.

Dies alles muß so kurz wiederkerend erfolgen, weil eine Folge von, von 0 an, unmittelbar auf einander folgender $\frac{10}{m}$ Fakten von m und der ersten, 2ten, 3ten u. s. w. $\frac{10}{m}$ Zalen hinlangt, um auf eine Zal zu stoßen, worin m und 10 zugleich rücksichtlich als Faktoren nur einmal vorkommen. Eben so muß die wiederkerende KreisFolge der EndZiffern von und für u.m, oder (10 — m), oder (10 — u.m) aus einer Folge von den $\frac{10}{m}$ ersten Fakten von u.m, oder (10 — m), oder (10 — u.m) bestehen; weil eine Folge von solchen, aus u.m, oder (10 — m) oder (10 — u.m) und den ersten $\frac{10}{m}$, von 0 an unmit-

telbar auf einander folgenden Zalen hinlangt, um auf eine Zal zu kommen, worin rücksichtlich u.m, (10 — m), (10 — u.m) und 10, jedes zugleich nur einmal als Faktoren vorkommen.

Zält man m von 0 an, 10 Mal in allen obigen Fällen oder in allen obigen Gattungen und deren Arten von FolgeZalenSüstemen zu sich selbst, so durchwandert man mMal jeden der rücksichtlichen obigen Kreiße der EndZiffernFolge von m und hat somit zugleich die Merfachen von m und den ersten 10 durch einfache Ziffern geschriebenen Zalen, oder die mfachen der ersten 10 Zalen (Vater- oder MutterZalen möchte ich sie nennen) geschaffen. Nichts geht über diese Leichtigkeit und Faßlichkeit eines solchen Taktes im Zälen nach und mit mEinzelnheiten zu einander, wenn m genau und blos ein Faktor der Basis 10 des ZalenSüstems ist. Alle andern durch einfache Ziffern geschriebenen Zalen halten keinen solchen wolgefälligen, regelmäßigen, gleich zurechtweisenden Takt oder Kreis von immer in wachsender Ordnung folgenden EndZiffern. Nur allein die Merfachen der ersten 10 Zalen nach den Unterschieden zwischen der Basis 10 und der Zal m oder die (10 — m)fachen der ersten 10 Zalen befolgen den umgekerten Takt oder Kreis im Zälen und im Merfachen mit m von den in wachsender Ordnung folgenden EndZiffern, d. i. sie befolgen ihn in einer stets sich mindernden Ordnung derjenigen EndZiffern, die Merfache von m sind. Auch diese Kreiße oder EndZiffernFolgen haben etwas Leichtes, höchstwolgefälliges, gleichsam ein vom Höchsten an behaglich zur Ruhe Herabfürendes.

Freilich kommen solcher behaglichen, wolgefälligen Takte oder Kreiße der EndZiffern von Merfachen in den ZalenSüstemen erster Gattung weniger als in den der zweiten Gattung, in den der 2ten Gattung weniger als in den der 3ten, und in den der 3ten weniger als in den der 4ten u. s. w. vor, jedoch rücksichtlich in ihren ersten Arten mer als in ihren 2ten Arten, in diesen mer als in ihren 3ten, in diesen 3ten Arten mer als in ihren 4ten, in den 4ten mer als in den 5ten Arten u. s. w. und auch mannigfaltiger; allein auch in dem Verhältnis der zunemenden Größe der PrimZalen als Faktoren der GrundZal oder Basis 10, auch schwieriger, länger und nach zunemend größern Differenzen fortschreitend.

Zält

Zält man in jedwedem ZalenSüsteme jedwede der ersten 10 durch einfache Ziffern geschriebenen Zalen von 0 an 10 Mal nach einander zu sich selbst, so erhält man von den Zalen 1 bis 10 die 1- bis 10fachen oder das sogenannte Einmaleins eines jeglichen ZalenSüstems. Je kleiner die als Faktoren in der GrundZal vorkommenden PrimZalen sind, desto merere nach wolbehaglichen TaktKreißen der EndZiffern fortwallende Merfache hat es unter seinen Sätzen des Einmaleinses und desto leichter ist auch das ZalenSüstem zu erlernen, desto vollkommener ist es; jedoch wie die GrundZal 10 zu groß und der Merfachen der ersten 10 Zalen oder der Sätze des sogenannten Einmaleinses zu viele werden, in dem Maße wird es auch wieder schwerer zu erlernen und auszuüben. Ein stetiges TheilungsSüstem aller Maße, Gewichte und Dinge nach einem der ZalenSüsteme muß um so schwieriger, Kraft und Zeit vergeudender werden, wie die als Faktoren in der Basis 10 vorkommenden PrimZalen größer werden. — Sie, diese Süsteme, werden in dem Maße immer verwerflicher. Die Differenzen oder die Anzal Einzelnheiten, um die man behaglich fortschreitet, sind nicht zu groß, leichter faßbar. Daraus ergiebt sich, daß ZalenSüsteme, in deren Basis blos die beiden kleinsten, ersten und unmittelbar auf einander folgenden PrimZalen 1 + 1, und 1 + 1 + 1 (d. i. zwei und drei) als Faktoren vorkommen, leichter als alle andern ZalenSüsteme und jedem andern vorzuziehen sind, worin die eine oder die andere felt oder deren Basis andere PrimZalen oder auch nur eine der folgenden immer größern PrimZalen zum Faktor hat.

Wenn man von einer andern Zal als von 0 oder von m an, m beständig zu sich hinzuzälen geneigt ist, so wird die TaktKreißFolge der EndZiffern wol in eine andere, jedoch eben so regelmäßig fortwallende oder rücklaufende verwandelt, die in Hinsicht der Anzal der EndZiffern dieselbe ist. Denn es ist ja ganz gleich und ändert das Resultat nicht, ob ich die Zal x, von der an ich m wiederholend hinzuzäle, gleich von Anfang hinzurechne oder sie zu jedem Merfachen von m einzeln oder besonders hinzuzäle. — Es bleiben im Zälen die EndZiffernFolgen oder die TaktKreiße dieselben, die beständig zu sich selbst gezälte Zal mag entweder m, oder 10 + m oder 10 + 10 + m, oder 10 + 10 + 10 + m u. s. w. seün. Zalen, die auf einerlei

Ziffer

Ziffer enden, haben denselben TaktKreiß von EndZiffern beim zu sich selbst Zälen derselben, was von selbst einleuchtet, da die Ziffer auf die sie enden und nicht die in den höhern Stellen, die Ursache der EndZiffernKreisFolge ist, diese bedingt.

Hier noch einiges unter das Kapitel vom Zälen und Merfachen Gehöriges.

Wenn des ZalenSüstems Basis 10 = ab ist und dann a < b, so ist aa < 10 < bb. Ist a > b, so ist aa > 10 > bb; Basis 10 = aab und a $\overset{\vee}{<}$ b ist, so ist auch aaa $\overset{\vee}{<}$ 10 $\overset{\vee}{<}$ bbb; Ist aa $\overset{\vee}{<}$ b, so ist bb $\overset{\vee}{<}$ 10 $\overset{\vee}{<}$ aaaa; a $\overset{\vee}{<}$ b, so ist aaa $\overset{\vee}{<}$ 10 $\overset{\vee}{<}$ bbb; aa $\overset{\vee}{<}$ b, so ist bb $\overset{\vee}{<}$ 10 $\overset{\vee}{<}$ aaaa; b $\overset{\vee}{<}$ a, so ist bbb $\overset{\vee}{<}$ 10 $\overset{\vee}{<}$ aaa.

Dergleichen Betrachtungen von den Wurzeln oder PrimZalen der Basis 10 = abc von ZalenSüstemen lasse ich weg, weil das erste von dieser Art ZalenSüsteme schon beinahe die FassungsKraft der Menschen übersteigen würde, es isi das sogenannte TregesimalZalenSüstem. —

Lassen Sie uns, theuere Leser, jetzt die KennZeichen der Theilbarkeit der Zalen, die ein ZalenSüstem von jeglicher Art gewärt oder haben kann, genetisch prüfen.

Die Basen 10 der verschiedenen FolgeZalenSüsteme sind Fakten aus PrimZalen unter folgenden Formen, Basis 10 entweder = ab, oder aa; abc, aab, aaa; abcd, aabc, aabb, aaab, aaaa; u. s. w. aaaaa; für das Faktum aus der Basis 10 mit sich selbst oder die Formen für 100 = aabb, aaaa; abcabc; aabaab, aaaaaa; abcdabcd, aabcaabc, aabbaabb, aaabaaab, aaaaaaaa; u. s. w. aaaaaaaaaa; u. s. w.

Weil nun jede Zal, die sich auf 0 endet, als ein 10faches oder als ein Merfaches der GrundZal 10 zu betrachten ist und diese sich durch ihre Faktoren, in die sie zerfällbar ist, in rationale Theile theilen, oder dividiren lassen muß; so sind auch absolut alle jene auf 0 sich endigenden Zalen durch dieselben Zalen oder Faktoren rational theilbar. Sollte sich aber die Zal nicht auf 0, sondern auf eine der andern Ziffern enden, so ist sie nur insofern durch eine von jenem durch einfache Ziffern geschriebenen, Zalen, die Faktoren der GrundZal 10 sind, rational theilbar, inwiefern die EndZiffer gerade eines, der durch einfache Ziffern noch geschrieben werdenden, Merfachen von ihr ist oder

mit

mit andern Worten eine EndZiffer aus jener mit o anfangenden und endenden taktmäßig kreißenden EndZiffernFolge von ihr ist.

Zalen, die nicht in der Basis 10, sondern in ihrer ersten Merfachung durch sich selbst, d. h. in 100 als Faktoren ganz vorkommen, theilen irgend eine größere gegebene Zal, wenn dieser sich nicht blos auf oo endet, wo es von selbst einleuchtet, in rationale Theile, sondern auch inwiefern die beiden EndZiffern in den beiden letzten Stellen rechter Hand oder die EndZalen in den zwei letzten Stellen zusammen gerade ein Merfaches der theilenden Zal sind.

Die Verneinung oder Negation der Theilbarkeit von Zalen, durch die Faktoren der Basis in diesem und dem vorigen Falle, wenn deren EndZiffern andere Zalen als die erforderlichen rücksichtlichen Merfachen sind, leuchtet von selbst als notwendig ein. Eben so ist kein Grund in einem ZalenSüsteme vorhanden, wie sich KennZeichen für die Theilbarkeit der Zalen durch die übrigen einzifferigen oder sonstigen Zalen bilden, oder aus der Basis oder ihrer eigenen Merfachungen ergeben sollten, welche Zalen gerade keine Faktoren von diesen eigenen Merfachungen der Basis sind. Und nur die letzte einzifferige Zal und die erste nach der GrundZal begründen für sich und für die in ihnen als Faktoren enthaltenen einzifferigen Zalen KennZeichen der Theilbarkeit anderer Zalen durch sie, wie wir weiter unten finden werden, —

Doch möchte es ersprieslich seün, wenn ich von dem eben ganz im Allgemeinsten Erwießenen mer die besondern jedoch noch allgemeinen Fälle hier angebe.

In einem ZalenSüsteme sind die KennZeichen der Theilbarkeit einer Zal, wenn die Basis 10 = ab; durch a, wenn die EndZiffer eine der afachen der ersten b Zalen ist; durch b, wenn die EndZiffer ein bfaches der ersten a Zalen: Basis 10 = aa, durch a, wenn die EndZiffer ein afaches der ersten a Zalen: Basis 10 = abc, durch a, wenn die EndZiffer ein afaches der ersten bc Zalen; durch b, wenn die EndZiffer ein bfaches der ersten ac Zalen; durch c, wenn die EndZiffer ein cfaches der ersten ab Zalen; durch bc, wenn die EndZiffer ein bcfaches der ersten a Zalen; durch ac, wenn die EndZiffer ein acfaches der ersten b Zalen; durch ab, wenn die EndZiffer ein abfaches der ersten c Zalen ist: Basis 10 = aab, durch a, wenn die EndZiffer ein afaches der ersten ab Zalen; durch b, wenn

die

die EndZiffer ein bfaches der ersten aa Zalen; durch ab, wenn die EndZiffer ein abfaches der ersten a Zalen; durch aa, wenn die EndZiffer ein aafaches der ersten b Zalen ist: Basis 10 = aaa, durch a, wenn die EndZiffer ein afaches der ersten aa Zalen; durch aa, wenn die EndZiffer ein aafaches der ersten a Zalen ist.

Wenn aber des ZalenSüstems Basis ein Faktum aus vier PrimZalen ist, sind rücksichtlich die KennZeichen der Theilbarkeit der Zalen durch einen solchen Faktor folgende: wiefern die Basis 10 = abcd; durch a, wenn die EndZiffer ein afaches der ersten acd Zalen; durch c, wenn die EndZiffer ein cfaches der ersten bad Zalen; durch b, wenn die EndZiffer ein bfaches der ersten acd Zalen; durch d, wenn die EndZiffer ein dfaches der ersten abc Zalen; durch ab, wenn die EndZiffer ein abfaches der ersten cd Zalen; durch cd, wenn sie ein cdfaches der ersten ba Zalen; durch ac, wenn die EndZiffer ein acfaches der ersten bd Zalen; durch bd, wenn die EndZiffer ein bdfaches der ersten ac Zalen; durch ad, wenn die EndZiffer ein adfaches der ersten bc Zalen; durch bc, wenn die EndZiffer ein bcfaches der ersten ad Zalen; durch bcd, wenn die EndZiffer ein bcdfaches der ersten a Zalen; durch acd, wenn die EndZiffer ein acdfaches der ersten b Zalen; durch abd, wenn die EndZiffer ein abdfaches der ersten c Zalen; durch abc, wenn die EndZiffer ein abcfaches der ersten d Zalen ist.

Wiefern die Basis 10 = aabc, durch a, wenn die EndZiffer ein afaches der ersten abc Zalen ist; durch b, wenn die EndZiffer ein bfaches der ersten aac Zalen; durch c, wenn die EndZiffer ein cfaches der ersten aab Zalen; durch aa, wenn die EndZiffer ein aafaches der ersten bc Zalen; durch bc, wenn die EndZiffer ein bcfaches der ersten aa Zalen; durch ab, wenn die EndZiffer ein abfaches der ersten ac Zalen; durch ac, wenn sie ein acfaches der ersten ab Zalen; durch abc, wenn sie ein abcfaches der ersten a Zalen; durch aac, wenn die EndZiffer ein aacfaches der ersten b Zalen; durch aab, wenn die EndZiffer ein aabfaches der ersten c Zalen ist.

Wiefern die Basis 10 = aabb; durch a, wenn die EndZiffer ein afaches der ersten abb Zalen; durch b, wenn die EndZiffer ein bfaches der ersten aab Zalen; durch aa, wenn die EndZiffer ein aafaches der ersten bb Zalen; durch bb, wenn die EndZiffer ein bbfaches der ersten aa Zalen; durch ab, wenn die EndZiffer ein abfaches der ersten ab

Zalen; durch abb, wenn die EndZiffer ein abbfaches der ersten a Zalen; durch aab, wenn die EndZiffer ein aabfaches der ersten b Zalen ist.

Wiefern die Basis 10 = aaab; durch b, wenn die EndZiffer ein bfaches der ersten aaa Zalen; durch a, wenn die EndZiffer ein afaches der ersten aab Zalen; durch aa, wenn die EndZiffer ein aafaches der ersten ab Zalen; durch ab, wenn die EndZiffer ein abfaches der ersten aa Zalen; durch aaa, wenn die EndZiffer ein aaafaches der ersten b Zalen; durch aab, wenn die EndZiffer ein aabfaches der ersten a Zalen ist.

Wiefern des ZalenSüstems Basis 10 = aaaa; durch a, wenn die EndZiffer ein afaches der ersten aaa Zalen; durch aa, wenn die EndZiffer ein aafaches der ersten aa Zalen; durch aaa, wenn die EndZiffer ein aaafaches der ersten a Zalen ist.

Wiefern des ZalenSüstems Basis 10 = aaaaa; durch a, wenn die EndZiffer ein afaches der ersten aaaa Zalen; durch aa, wenn die EndZiffer ein aafaches der ersten aaa Zalen; durch aaa, wenn die EndZiffer ein aaafaches der ersten aa Zalen; durch aaaa, wenn die EndZiffer ein aaaafaches der ersten a Zalen ist.

Ich könnte hier auch die einzelnen Fälle näher bestimmen, worin es darauf ankömmt, daß in der zutheilenden Zal nicht blos die eine letzte EndZiffer, sondern die beiden letzten EndZiffern zusammen ein Merfaches des Theilers (in rationale gleiche Theile) seün müssen; inwiefern dieser nämlich nur in 100 erst als Faktor ganz vorkömmt und nicht in 10, eben so in 1000 erst und nicht in 100 und 10 und dergleichen. Allein es würde mich zu weit abfüren und läßt mich fürchten, zu weitläufig zu werden. Einige AbleitungsGabe kann dies alles beim Leser ersetzen; — der sich selbst sagen wird, daß es nur die Potenzen eines der in der Basis enthaltenen Faktoren oder die Fakten aus ungleichen Potenzen der verschiedenen PrimZalen als Faktoren in der Basis seün können, welche eine solche gesetzmäßige rationale Theilbarkeit fordern dürfen und auch aufweißen.

Die sich, aus der, ums eins kleineren und aus der um eins größeren Zal als die GrundZal 10, ergebenden KennZeichen der Theilbarkeit der Zalen beruhen auf folgenden algebraischen Betrachtungen.

Die größte einzifferige Zal oder die um eine Einzelnheit als die GrundZal kleinere Zal seü = x, so ist in jedem

dem ZalenSüsteme $10 - 1 = x$; $10 = 1 + x$, $10.10 = (1 + x)(1 + x)$, $10.10.10 = (1 + x)(1 + x).(1 + x)$ u. s. w. $10^n = (1 + x)^n$. So gut wie die Basis des ZalenSüstems entweder eine PrimZal oder ein Faktum aus zwei oder mereren PrimZalen ist, die als Faktoren alle von einander verschieden, einige gleich und die übrigen ungleich, einige und wieder einige sich gleich oder alle einander sich gleich sind, so gut kann es auch die größte einzifferige Zal seün. Ihre möglichen Formen, als Faktum jenen gleichende sind folgende

m; mn, mm; mno, mmn, mmm; mnop, mmno, mmnn, mmmn, mmmm; u. s. w. mmmmm;

Nach der UrrechnenLere oder erweiterten Algebra ist

$$10^n = (1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\ 2}x^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ 2\ 3}x^3 + + \ldots + \frac{n(n-1)}{1\ 2}.$$

$$\frac{(n-2)}{3}x^{n-3} + \frac{n(n-1)}{1\ 2}n^{n-2} + \frac{n}{1}x^{n-1} + x^n.$$

$$10^n = 1 + x[n + \frac{n(n-1)}{1\ 2}x + \frac{n(n-1)}{1\ 2}.$$

$$\frac{(n-2)}{3}x^2 + + \ldots + \frac{n(n-1)}{1\ 2}x^{n-3}$$

$$+ nx^{n-2} + x^{n-1}]$$

In die in Klammern eingeschlossene Reihe setze man überall statt x wiederum $10 - 1$ und ordne alles, was in einerlei Potenz von 10 multiplizirt ist zu einander, addire es, so erhält man aus der letzten Gleichung die folgende

$$
\begin{aligned}
\text{also } 10^n &= 1 + x\,[10^{n-1} + 10^{n-2}] + 10^{n-3} \\
\text{und } v \cdot 10^n &= v + x.v\,[10^{n-1} + 10^{n-2}] + 10^{n-3} \\
\text{und } t \cdot 10^{n-1} &= t + xt\,[10^{n-2} + 10^{n-3}] + 10^{n-4} \\
\text{und } r \cdot 10^{n-2} &= r + xr\,[10^{n-3} + 10^{n-4}] + 10^{n-5} \\
\text{und } w \cdot 10^{n-p} &= w + xw\,[10^{n-p-1} + 10^{n-p-2}] + 10^{n-p-3} \\
\text{bis } z \cdot 10^2 &= z + xz\,[10 + 1] \\
\\
y \cdot 10^n &= y + xy \\
&+ 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0 \\
&+ 10^2 + 10^1 + 10^0 \\
&+ 10^2 + 10^1 + 10^0 \\
&+ 10^2 + 10^1 + 10^0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ 10^2 + 10^1 + 10^0 \\
&+ 10^1 + 10^0 \\
&+ 10^0
\end{aligned}
$$

Hier

Hier zieht man den Schluß, daß, wenn der Ziffern Summe z. B. $v + t + r + w + + \ldots + z + y$ einer Zal ein xfaches ist, indem man absieht von dem Werte der Ziffern, den sie durch ihre Stelle erhalten und bezeichnen, auch die ganze Zal ein xfaches, folglich durch x der größten einzifferigen Zal, theilbar seün müsse; — daß, wenn die ZiffernSumme, indem x entweder $=$ mn, oder $=$ mm, mno, mmn, mmm; mnop, mnom, mmnn, mmmn, oder mmmm; u. s. w. oder mmmmm seü, ein mfaches, oder n; mn, mo, no, o; mm; mno, nop, mnp, mop, mp, np, op, p, nn, mmn, mnn, mmmfaches rücksichtlich seü, die ganze Zal ein solches Merfaches, folglich durch diese dergleichen einzifferige Zal eben rational theilbar seün müsse. Man nennt der Ziffern Summe auch die Quersumme.

Ine Anwendung der BinomialFormel erhält man auch obigen letzten allgemeinen Ausdruck, indem man 10^n durch $10 - 1 = x$ algebraisch dividirt und nachmals zu beiden Seiten, auf der einen die Reihe mit x und auf der andern mit $10 - 1$ wieder multiplizirt

$$\begin{array}{l|l} 10^n & 10^{n-1} + 10^{n-2} + + \ldots + 10^2 + 10' + 10^0 + \frac{1}{10-1} \\ \underline{10 - 1} & \\ \underline{10^n - 10^{n-1}} & \\ \underline{+ 10^{n-1}} & \\ \quad 10' - 1 & \\ \underline{10^{n-1} - 10^{n-2}} & \\ \underline{+ 10^{n-2}} & \\ \quad \text{u. s. w. } 10' & \\ \quad \underline{10 - 1} & \\ \quad + 1 & \end{array}$$

$$\text{Also } \frac{10^n}{10-1} = (10^{n-1} + 10^{n-2} + + \ldots + 10^2 + 10' + 10^0) + \frac{1}{10-1}$$

$$10^n = 1 + x(10^{n-1} + 10^{n-2} + 10^{n-3} + + \ldots + 10^2 + 10' + 1)$$

Anm.

Anm. Man bedient sich auch häufig dieser Quersummen beim Addiren, Subtrahiren, Multipliziren und Dividiren nach gewissen Regeln, um sich von der Richtigkeit des Gerechneten schneller zu überzeugen als wenn man alles erst nachrechnen wollte, indem man sich blos um ein (10 — 1)faches geirrt haben kann.

Die nach der GrundZal um eine Einzeluheit nächst größere Zal bezeichnet man gewönlich mit 11, wir wollen sie der Nettigkeit und Leichtigkeit wegen hier bei unsern allgemeinern Untersuchungen auch so bezeichnen.

(Gleich der GrundZal oder Basis kann 11, oder die um eins größere Zal als die Basis 10; bald eine PrimZal oder ein Faktum aus zwei oder mereren PrimZalen seün unter änlichen Formen.)

Es ist demnach $10 + 1 = 11$ und $10 = 11 - 1$, $10.10 = 100 = (11 - 1)(11 - 1)$, $1000 = (11 - 1)(11 - 1)(11 - 1)$ u. s. w. $10^n = (11 - 1)^n$ $10^{2n} = (11 - 1)^{2n}$, $10^{2n+1} = (11 - 1)^{2n+1}$. Diese beiden letzten blos angedeuteten Formeln würklich algebraisch nach der BinomialFormel entwickelt, giebt zuvörderst für die erste

$$10^{2n} = +1 - \frac{2n}{1}11 + \frac{2n(2n-1)}{1\ 2}11^2 - \frac{2n}{1}\cdot$$

$$\frac{(2n-1)(2n-2)}{2\ 3}11^3 + - \text{u. s. w.} - \frac{2n}{1}\cdot$$

$$\frac{(2n-1)(2n-2)}{2\ 3}11^{2n-3} + \frac{2n(2n-1)}{1\ 2}11^{2n-2}$$

$$- \frac{2n}{1}11^{2n-1} + 11^{2n} = 11^{2n} - \frac{2n}{1}11^{2n-1}$$

$$+ \frac{2n(2n-1)}{1\ 2}11^{2n-2} - \frac{2n(2n-1)}{1\ 2}\cdot$$

$$\frac{(2n-2)}{3}11^{2n-3} + - \text{u. s. w.} - \frac{2n(2n-1)}{1\ 2}\cdot$$

$$- \frac{(2n-2)}{3}11^3 + \frac{2n(2n-1)}{1\ 2}11^2 - \frac{2n}{1}11' + 11^0]$$

10^{2n}

$$10^{2n} - 1 = 11[11^{2n-1} - \frac{2n}{1}11^{2n-2} + \frac{2n}{1}.$$
$$\frac{(2n-1)}{2}11^{2n-3} + + - \text{u. s. w.} - \frac{2n(2n-1)}{1\ 2}.$$
$$\frac{(2n-2)}{3}11^2 + \frac{2n(2n-1)}{1\ 2}11 - \frac{2n}{1}11^0]$$

In die in Klammern eingeschlossene Reihe setze man überall $10+1$ statt 11 wiederum, entwickele die Potenzen von $10+1$ und ordne und addire alles, was in einerlei Potenz von 10 multiplizirt ist, zu einander, so erhält man den folgenden netten Ausdruck

$$10^{2n} = 1 + u[10^{2n-1} - 10^{2n-2} + 10^{2n-3} - 10^{2n-4}$$
$$+ - \text{u. s. w.} - 10^4 + 10^3 - 10^2 + 10'$$
$$- 10^0]$$

$$10^{2n} = 1 + 11(10-1)[10^{2n-2} + 10^{2n-4} +$$
$$10^{2n-6} + \text{u. s. w. ...} + 10^4 + 10^2 + 10^0]$$

Bei der zweiten Formel $10^{2n+1} = (11-1)^{2n+1}$ in der Entwickelung nach gleicher Methode verfaren, so erhält man nach und nach folgendes:

$$10^{2n+1} = -1 + \frac{2n+1}{1}11 - \frac{(2n+1)(2n)}{1\ 2}11^2$$
$$+ \frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)}{1\ 2\ 3}11^3 - + \text{u. s. w.}$$
$$- \frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)}{1\ 2\ 3}11^{2n-2} + \frac{(2n+1)}{2}.$$
$$\frac{(2n)}{2}11^{2n-1} - \frac{(2n+1)}{1}11^{2n} + 11^{2n+1}$$
$$= 11^{2n+1} - \frac{(2n+1)}{1}11^{2n} + \frac{(2n+1)\,2n}{1\ 2}.$$
$$[11^{2n-1} - \frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)}{1\ 2\ 3}11^{2n-2} + -$$
$$.. +$$

$$\ldots + \frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)}{1\quad 2\quad 3}11^3 - \frac{(2n+1)}{1}\cdot$$
$$\frac{2n}{2}11^2 + \frac{2n+1}{1}11' - 11^0$$

$10^{2n+1} + 11^0 = 11[11^{2n} - \frac{2n+1}{1}11^{2n-1}$
$+ \frac{(2n+1)\,2n}{1\quad 2}11^{2n-2} - \frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)}{1\quad 2\quad 3}\cdot$
$11^{2n-3} + - \ldots + \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{1\quad 2\quad 3}\cdot$
$11^2 - \frac{(2n+1)(2n)}{1\quad 2}11' - \frac{(2n+1)}{1}11^0]$

$10+1$ jetzt Statt 11 in den Gliedern der in den Klammern eingeschlossenen Reihe gesetzt, alles entwickelt und, was in einerlei Potenz von 10 multiplizirt ist, zu einander geordnet und addirt und $+ 11^0$ auf die andere Seite gebracht, giebt den folgenden Ausdruck:

$10^{2n+1} = -1 + 11.[10^{2n} - 10^{2n-1} + 10^{2n-2}$
$- 10^{2n-3} + - \ldots + 10^4 + 10^3 + 10^2$
$- 10' + 10^0]$

$10^{2n+1} = -1 + 11[10^{2n} - (10-1)(10^{2n-2}$
$10^{2n-4} + 10^{2n-6} \ldots + 10^4 + 10^2 + 10^0)]$

Es war aber zuvor $10^{2n} = +1 + 11(10-1).$
$[10^{2n-2} + 10^{2n-4} + 10^{2n-6} \ldots + 10^4 + 10^2$
$+ 10^0]$ dieser Ausdruck für 10^{2n} in die vorige Formel für 10^{2n+1} gesetzt, so erhält man

$10^{2n+1} = -1 + 11[+1 + 11.(10-1)(10^{2n-2}$
$+ 10^{2n-4} + 10^{2n-6} \ldots + 10^4 + 10^2 + 1)$
$-(10-1)(10^{2n-2} + 10^{2n-4} + 10^{2n-6} \ldots$
$+ 10^4 + 10^2 + 1)]$

$10^{2n+1} = -1 + 11[+1 + (10-1)(10^{2n-1}$
$+ 10^{2n-3} + 10^{2n-5} \ldots + 10^5 + 10^3 + 10)]$

Folglich wenn eine Zal, die durch 11 zu theilen wäre, aus folgenden Gliedern bestände:

$$r.10^{2n+1} = -r + r.11\,[1 + (10-1)(10^{2n-1} + 10^{2n-3} + 10^{2n-5} \ldots + 10^5 + 10^3 + 10)]$$

$$\text{und } s.10^{2n} = +s + s.11\,[(10-1)(10^{2n-2} + 10^{2n-4} + 10^{2n-6} \ldots + 10^4 + 10^2 + 10^0)]$$

$$\text{und } t.10^{2n-1} = -t + t.11\,[1 + (10-1)(10^{2n-3} + 10^{2n-5} + 10^{2n-7} \ldots + 10^5 + 10^3 + 10)]$$

$$\text{und } u.10^{2n-2} = +u + u.11\,[(10-1)(10^{2n-4} + 10^{2n-6} + 10^{2n-8} \ldots + 10^4 + 10^2 + 10^0)]$$

u. ſ. w. bis

$$v.10^5 = -v + v.11\,[1 + (10-1)(10^3 + 10)]$$

$$w.10^4 = +w + w.11\,[(10-1)10^2 + 10^0)]$$

$$x.10^3 = -x + x.11\,[1 + (10-1).10]$$

$$y.10^2 = +y + y.11\,[(10-1)1$$

$$z.10 = -z + z.11 + a \text{ und } a.10^0 = +a + a0$$

Hieraus läßt sich bei einiger Aufmerksamkeit der Schluß ziehen, daß, wenn $\mp (r + t \ldots + v + x + z) \mp (s + u + w + y + a)$ oder daß, wenn zwischen der Quersumme der ungeraden Stellen und der Quersumme der übrigen geraden Stellen einer Zal, der Unterschied selöst ein IIfaches, also entweder o, oder II oder II + II oder II + II + II, u. s. w. ist, folglich dieser Unterschied durch II rational theilbar ist; so muß auch die ganze Zal one Rest durch II theilbar seün: und somit, wenn der Unterschied zwischen der Quersumme der ungeraden Stellen und der Quersumme der geraden Stellen, selbst ein m oder n, oder mn, mo, no, ofaches u. s. w. wie oben rücksichtlich ist, die Zal II nämlich: entweder mn oder mm, oder mn, mno, oder mmnfaches u. dergl. weiter rücksichtlich seüend, so muß auch die ganze Zal ein m oder n, oder mn, mo, no, oder ofaches oder durch solche rational theilbar u. s. w. gleicher Maßen seün.

Anm. In Friedrich Gottlieb Busse's erstem Unterrichte in der algebraischen Auflösung arithm. und geometr. Aufgaben 1ten Band. §. 510. und im ersten Theile seiner Beiträge zur Mathematik und Phüsik und deren LerMethode sollen änliche Erörterungen von diesen Quersummen für die letzte einzifferige und für die nächst größere Zal nach der Basis und den verschiedenen RechnungsProben vermittelst derselben vorkommen; ich kenne sie aber nicht. —

Durch diese Eigenschaften der um eins größern oder um eins kleinern Zalen, als die GrundZal, gewären selbst PrimZalenSüsteme eigene KennZeichen der Theilbarkeit der Zalen, nur wird das Untersuchen der Theilbarkeit der Quersummen oder ihrer Unterschiede immer in mühseliger, schwerfälliger und langweiliger, je größer die zutheilende Zal ist, aus je mereren Stellen sie besteht. Allein mer anderweitige Vortheile gewären auch diese ZalenSüsteme nicht, sie häufen Schwerfälligkeiten über Schwerfälligkeiten beim Zälen nach ihren mit irgend einer Anzal Einzelnheiten beständig zu einander, der taktmäßige FolgeKreis besteht bei allen Zalen aus allen den 10 Ziffern oder einzifferigen Zalen; die Sätze ihres Einmaleinses sind insgesammt die schwerfälligsten, die man sich zu erlernen denken kann. Und kein gemeiner Bruch läßt sich darin in einen endlichen SüstemBruch, von denen wir sogleich

gleich handlen werden, durch fortgesetztes Dividiren verwandeln. —

Wie man eine Zal bedingt absoluter Einzelnheiten zu einer höhern Einzelnheit und eine jener gleichen Anzal von diesen zu einer noch höhern und so immer fortkolligirte, sammelte und sie jedes Mal mit demselben, jedoch nur nach Verhältnis des höhern Grades weiter Links fortgerückten Bildes darstellte; so läßt sich auch die bedingt absolute Einzelnheit als in eine gleichmäßige Anzal kleinerer Einzelnheiten getheilt betrachten und so Eine von diesen wieder- um in eine gleichmäßige Zal noch kleinerer Einzelnheiten, oder auf der andern Seite hinaus theilen und zerlegen, so, daß jede niedere Einzelnheit doch noch aus immer nach und nach gleichmäßigen niedern Einzelnheiten bestehen kann. Diese immer niedern und niedern Einzelnheiten läßt man der Analogie nach oder Gleichförmigkeit wegen nach den Graden ihrer Erniedrigung nach einem sogenannten Einer-Komma rechter Hand hinter den primitiven Einzelnheiten nach einander folgen. Es sind Brüche von diesen und da die Basis oder GrundZal des ZalenSüstems, einfach oder in ihren eigenen Merfachungen, als Theiler oder Nenner sie bedingt, so wollen wir sie BasenBrüche oder SüstemBrüche benennen. Auf die so nette Bezeichnung oder Schreibung dieser Brüche in dem gebräuchlichen ZalenSüsteme kam man erst in den spätern Zeiten, als das Süstem in Hinsicht der Schreibung der Ganzen schon längst bekannt war. Man schrieb sie wie andere gemeine Brüche auch, indem man den Zäler über und den Nenner unter den geraden Strich setzte; jetzt aber ist folgende nette, mer den ganzen Zalen analoge, gebräuchlich:

$\frac{1}{10} = 0{,}1$; $\frac{1}{100} = 0{,}01$; $\frac{1}{10000} = 0{,}001$ u. s. w. 0,0001; 0,00001; 0,000001 u. s. w., wo 0,1 stets 10 Mal kleiner als 1; oder wo 0,000001 10 Mal kleiner als 0,00001; 100 Mal $<$ 0,0001; 1000 Mal $<$ 0,001; 10000 Mal kleiner als 0,01; 10000 Mal $<$ als 0,1 und wo 0,000001 1000000 Mal kleiner als 1 ist. Andere gemeine Brüche müssen sich daher in BasenBrüchen, durch ins Unbestimmte fortgesetztes Dividiren mit ihrem Nenner in den Zäler, verwandeln lassen, doch nicht alle one Rest, einige zwar. Welche unter ihnen diese Eigenschaftn besitzen, wollen wir eben genauer kennen lernen.

Wie rücksichtlich des FolgeZalenSüstems Basis 10 entweder ab, oder aa, abc, aab, aaa; abcd, aabc, aabb,

aabb, aaab, aaaa; u. ſ. w. aaaaa; u. ſ. w. und dieſerwegen 100 entweder abab, aaaa; abcabc, aabaab, aaaaaa; abcdabcd, aabcabac, aabbaabb, aaabaaab, aaaaaaaa u. ſ. w. und 1000 rückſichtlich entweder ababab, aaaaaa; abcabcabc, aabaabaab, aaaaaaaaa; abcdabcdabcd, aabcaabcaabc, aabbaabbaabb, aaabaaabaaab, aaaaaaaaaaaaa u. ſ. w. iſt. So ſind rückſichtlich auch nur ſolche gemeine Brüche in endliche Baſen- oder Süſtem-Brüche verwandelbar, deren Nenner als Faktoren ganz, entweder in der Baſis ſelbſt oder doch in ihren eigenen Verfachungen nur vorkommen. Sie werden ſeün, wenn

$$10 = ab,\ \frac{1}{a} = b.0{,}1;\ \frac{1}{b} = a.0{,}1;\ \frac{1}{aa} = 0{,}01.bb;$$

$$\frac{1}{bb} = 0{,}01.aa;\ \frac{1}{aab} = 0{,}01.b;\ \frac{1}{abb} = 0{,}01.a:$$

$$10 = aa,\ \frac{1}{a} = 0{,}1.a;\ \frac{1}{aaa} = 0{,}01.a:$$

$$10 = abc,\ \frac{1}{a} = 0{,}1.bc;\ \frac{1}{b} = 0{,}1.ac;\ \frac{1}{c}$$

$$= 0{,}1.ab;\ \frac{1}{bc} = 0{,}1.a;\ \frac{1}{ac} = 0{,}1.b;\ \frac{1}{ab} = 0{,}1.c;$$

$$\text{alſo } 100 = abcabc,\ \frac{1}{aa} = 0{,}01.bc.bc;\ \frac{1}{bb}$$

$$= 0{,}01.acac;\ \frac{1}{cc} = 0{,}01.abab;\ \frac{1}{bc.bc} = 0{,}01.aa;$$

$$\frac{1}{acac} = 0{,}01.bb;\ \frac{1}{abab} = 0{,}01.cc;\ \frac{1}{aab}$$

$$= 0{,}01.bcc;\ \frac{1}{aac} = 0{,}01.bbc;\ \frac{1}{bcc} = 0{,}01.aab;$$

$$\frac{1}{bbc} = 0{,}01.aac;\ \frac{1}{aabc} = 0{,}01.bc;\ \frac{1}{bbca}$$

$$= 0{,}01.ac;\ \frac{1}{ccab} = 0{,}01.ab;\ \frac{1}{ababc} = 0{,}01.c;$$

$\frac{1}{aabcc} = 0{,}01 . b$; $\frac{1}{abbcc} = 0{,}01 . a$:

Basis $= aab$, $\frac{1}{a} = 0{,}1 . ab$; $\frac{1}{b} = 0{,}1 . aa$;

$\frac{1}{aa} = 0{,}1 . b$; $\frac{1}{ab} = 0{,}1 . a$; also $100 = aabaab$;

$\frac{1}{aaa} = 0{,}01 . abb$; $\frac{1}{aaaa} = 0{,}01 . bb$; $\frac{1}{abb}$

$= 0{,}01 . aaa$; $\frac{1}{bb} = 0{,}01 . aaaa$; $\frac{1}{aabb} = 0{,}01 . aa$;

$\frac{1}{aaab} = 0{,}01 . ab$; $\frac{1}{aaaab} = 0{,}01 . b$; $\frac{1}{aaabb} = 0{,}01 . a$;

Basis $10 = aaa$, $\frac{1}{a} = 0{,}1 . aa$; $\frac{1}{aa} = 0{,}1 . a$;

$100 = aaaaaa$, $\frac{1}{aaaa} = 0{,}01 . aa$; $\frac{1}{aaaaa} = 0{,}01 . a$.

Basis $10 = abcd$, $\frac{1}{a} = 0{,}1 . bcd$; $\frac{1}{b} = 0{,}1 .$

acd; $\frac{1}{c} = 0{,}1 . abd$; $\frac{1}{d} = 0{,}1 . abc$; $\frac{1}{bcd} = 0{,}1 . a$;

$\frac{1}{acd} = 0{,}1 . b$; $\frac{1}{abd} = 0{,}1 . c$; $\frac{1}{abc} = 0{,}1 . d$; $\frac{1}{ab}$

$= 0{,}1 . cd$; $\frac{1}{cd} = 0{,}1 . ab$; $\frac{1}{ac} = 0{,}1 . bd$; $\frac{1}{bd}$

$= 0{,}1 . ac$; $\frac{1}{ad} = 0{,}1 . bc$; $\frac{1}{bc} = 0{,}1 . ad$;

$100 = abcdabcd$, $\frac{1}{aa} = 0{,}01 . bcdbcd$; $\frac{1}{bb}$

$= 0{,}01 . aaccdd$; $\frac{1}{cc} = 0{,}01 . aabbdd$; $\frac{1}{dd} = 0{,}01 .$

$aabbcc$;

$aabbcc; \frac{1}{aab} = 0,01.cdbcd; \frac{1}{aac} = 0,01.bbddc;$

$\frac{1}{aad} = 0,01.bbccd; \frac{1}{abb} = 0,01.accdd; \frac{1}{bbc}$

$= 0,01.aacdd; \frac{1}{bbd} = 0,01.aaccd; \frac{1}{cca}$

$= 0,01.abbdd, \frac{1}{ccb} = 0,01.aabdd; \frac{1}{ccd}$

$= 0,01.aabbd; \frac{1}{dda} = 0,01.abbcc; \frac{1}{ddb}$

$= 0,01.aa.bcc; \frac{1}{ddc} = 0,01.aa.bbc; \frac{1}{aabb}$

$= 0,01.ccdd; \frac{1}{ccdd} = 01.aabb; \frac{1}{aacc} = 0,01.$

$bbdd; \frac{1}{bbdd} = 0,01.aacc; \frac{1}{aadd} = 0,01.ccbb;$

$\frac{1}{ccbb} = 0,01.aadd; \frac{1}{aabc} = 0,01.cbdd; \frac{1}{ddbc}$

$= 0,01.aabc; \frac{1}{aabd} = 0,01.ccbd; \frac{1}{ccbd} = 0,01.$

$aabd; \frac{1}{aacd} = 0,01.bbcd; \frac{1}{bbdc} = 0,01.aa.cd;$

$\frac{1}{bbac} = 0,01.acdd; \frac{1}{acdd} = 0,01.bbac; \frac{1}{bbad}$

$= 0,1.ccda; \frac{1}{ccda} = 0,01.ad.bb; \frac{1}{ccba} = 0,01.$

$abdd; \frac{1}{ddab} = 01.abcc; \frac{1}{aabcd} = 0,01.bcd;$

$\frac{1}{aabcc} = 0,01.bdd; \frac{1}{aabdd} = 0,01.bcc; \frac{1}{aaccd}$

$= 0,01.$

$= 0{,}01 . bbd$; $\frac{1}{aacdd} = 0{,}01 . bbc$; $\frac{1}{aabbc} = 0{,}01 .$
cdd; $\frac{1}{aabbd} = 0{,}01 . ccd$; $\frac{1}{bbccd} = 0{,}01 . aad$;
$\frac{1}{bbcca} = 0{,}01 . add$; $\frac{1}{bbcdd} = 0{,}01 . aac$; $\frac{1}{bbadd}$
$= 0{,}01 . acc$; $\frac{1}{ddacc} = 0{,}01 . abb$; $\frac{1}{ddbcc}$
$= 0{,}01 . aab$; $\frac{1}{abbcd} = 0{,}01 . acd$; $\frac{1}{abccd} = 0{,}01 .$
abd; $\frac{1}{abcdd} = 0{,}01 . abc$; $\frac{1}{abcdab} = 0{,}01 . cd$;
$\frac{1}{abcdac} = 0{,}01 . bd$; $\frac{1}{abcdad} = 0{,}01 . bc$;
$\frac{1}{abcdbc} = 0{,}01 , ad$; $\frac{1}{abcdbd} = 0{,}01 . ac$;
$\frac{1}{abcdcd} = 0{,}01 . ab$; $\frac{1}{abcdbcd} = 0{,}01 . a$;
$\frac{1}{abcdacd} = 0{,}01 . b$; $\frac{1}{abcdabd} = 0{,}01 . c$;
$\frac{1}{abcdabc} = 0{,}01 . d.$

Basis $10 = aabc$, $\frac{1}{a} = 0{,}1 . abc$; $\frac{1}{b} = 0{,}1 .$
aac; $\frac{1}{c} = 0{,}1 . aab$; $\frac{1}{aa} = 0{,}1 . bc$; $\frac{1}{ab} = 0{,}1 . ac$;
$\frac{1}{ac} = 0{,}1 . ab$; $\frac{1}{bc} = 0{,}1 . aa$; $\frac{1}{aab} = 0{,}1 . c$; $\frac{1}{aac}$
$= 0{,}1 . b$; $\frac{1}{abc} = 0{,}1 . a$.

Die

Die übrigen gemeinen Brüche, welche in zweistellige oder 3stellige, oder 4stellige u. s. w. Süstem= oder BasenBrüche verwandelbar sind, entspringen aus der ein= oder mermaligen Merfachung dieser Brüche unter und mit einander; ich lasse sie also weg.

Basis 10 = aabb; $\frac{1}{a}$ = 0,1.abb; $\frac{1}{b}$ = 0,1.

aab; $\frac{1}{aa}$ = 0,1.bb; $\frac{1}{bb}$ = 0,1.aa; $\frac{1}{ab}$ = 0,1.ab;

$\frac{1}{aab}$ = 0,0.ab; $\frac{1}{abb}$ = 0,1.a;

Desgleichen hier, wie im vorigen Falle, da die übrigen gemeinen Brüche verwandelbar in endliche BasenBrüche aus diesen einstelligen entspringen.

Basis 10 = aaab; $\frac{1}{a}$ = 0,1.aab; $\frac{1}{b}$ = 0,1.

aaa; $\frac{1}{aa}$ = 0,1.ab; $\frac{1}{ab}$ = 0,1.aa; $\frac{1}{aaa}$ = 0,1.b;

$\frac{1}{aab}$ = 0,1.a.

Ebenfalls:

Basis 10 = aaaa; $\frac{1}{a}$ = 0,1.aaa; $\frac{1}{aa}$ = 0,1.aa;

$\frac{1}{aaa}$ = 0,1.a.

Aus allem Diesen ergiebt sich das so merkwürdige Gesetz, daß nur solche gemeine Brüche in endliche Basen= oder SüstemBrüche verwandelbar sind, deren Nenner als Faktoren ganz in der Basis oder in der ejn= oder in den mermaligen Merfachungen derselben mit sich selbst vorkommen; Oder deren Nenner eine solche Zal ist, daß jede der PrimZalen, in die sie als ihre möglich kleinsten Faktoren zerfällt werden kann, als Faktoren in der Basis auch vorkommen, enthalten seüen müssen; alle anderen Brüche sind in pe=

rio=

riodische unendliche SüstemBrüche, von längerer oder kürzerer Periode, nur verwandelbar. Je kleiner die PrimZalen, die als Faktoren die Basis des ZalenSüstems (konstruiren) schaffen, desto größer die Anzal von gemeinen Brüchen, innerhalb einer gewissen ZalenGröße, die in endliche Basen- oder SüstemBrüche verwandelbar sind; desto leichter und anschaulicher überhaupt das ZalenSüstem und das gesammte Rechnen darnach, desto leichter die stetige materielle Theilung in der Würklichkeit, nach demselben. —

Der Grad der Vollkommenheit eines ZalenSüstems vor dem andern läßt sich nicht aus den bis hieher von mir vorgetragenen Sätzen und Leren der allgemeinen Arithmetik in scharfen Gränzen bestimmen; um dies zu können, muß man vom Allgemeinen abgehen und zur Erschaffung aller auf einander folgenden ZalenSüsteme mit nicht gar zu großen GrundZalen selbst überschreiten und jegliches ZalenSüstem mit allen seinen Vorzügen und Mängeln, der Reihe nach mit jedem der übrigen ZalenSüstemen und mit allen ihren Vorzügen und Mängeln auf das schärfste vergleichen.

Ueberall darf man aber den absoluten Vernunft- und ErfarungsSatz, daß nur die Theilungen und Einungen — ein- und mermalige — (Sammlung und Sonderung, Steigerung und Wurzelung) nach den — kleinsten — PrimZalen die leichtesten, sichersten und in kürzester Zeit bewerkstelligten sind, nicht aus dem Gesichte verlieren, wenn man die Vollkommenheiten in formaler und auch materialer Hinsicht richtig würdigen und abwägen will. —

Folgende Anfürung des kleinsten oder ersten ZalenSüstems von jeder der obigen Gattungen und Arten wird sie schon so ziemlich rubriziren.

a = 2, ZweiZalenSüstem; a.a = 2.2, VierZalenSüstem; a.b = 2.3, SechsZalenSüstem; a.a.a = 2.2.2, AchtZalenSüstem; a.a.b = 2.2.3, sogenanntes ZwölfZalenSüstem; a.a.a.a = 2.2.2.2, sogenanntes SechszenZalenSüstem; a.a.a.b = 2.2.2.3, sogen. ZwanzigvierZalenSüstem; a.b.c = 2.3.5, sogen. DreißigZalenSüstem; 2.2.3.3 = a.a.b.b, sogen. DreißigsechsZalenSüstem; 2.2.2.2.2 = a.a.a.a.a, sogen. DreißigzweiZalenSüstem; a.a.a.a.b = 2.2.2.2.3, sogen. Vierzig-

achts-

achtZalenSüstem; a.a.b.c = 2.2.3.5, sogen. SechzigZalenSüstem; a.a.a.a.a.a = 2.2.2.2.2.2.2, sogen. SechzigvierZalenSüstem u. s. w.

Dies allein, glaube ich, überhebt mich aller hier würklich anzustellenden Vergleichung der ZalenSüsteme und ihrer wechselseitigen Vorzüge und Mängel unter einander und in der Reihe nach einander, selbst nur dieser hier angefürten ersten von jeder Art; die Entscheidung für das sogen. ZwölfZalenSüstem ist zu stark in die Augen springend, selbst nur die Vergleichung mit seinen nächst vollkommenen Nachbarn hier dem Acht- und dem sogen. SechzenZalenSüsteme; geschweige mit dem Neun- Zen- und Delf- (Mör-) und mit dem sogen. Zendrei-, Zenvier- und Zenfünf- und den übrigen noch größern ZalenSüstemen. Erstere zu klein und Raum fressend, letztere schon zu groß, um von dem gemeinen Menschen in Hinsicht der Menge seiner EinmaleinsSätze gefaßt und behalten werden zu können. Der Fakten aus den ersten 10 einzifferigen Zalen (worunter die Basis gezält) mit jeder der ersten 10 Zalen oder der EinmaleinsSätze sind 2.2.2.2.2.2.2.2.2.2 zweihundert und funfzigsechs (Dekad.), oder einarde neuntaunvier (Teliof.) an der Anzal, welche im Gedächtniß und stets gegenwärtig zu behalten die Kräfte des Menschen schon zu sehr übersteigen.

Nachdem ich schließlich die Merfachen der ersten 10 Zalen oder das Einmaleins nach dem Acht- bis Taun- und bis zum sogen. Taunvier- (Sechzen-) ZalenSüsteme dem Leser zur selbst eigenen beliebigen Vergleichung hier am Ende hergesetzt haben werde, bleibt mir im stärksten Drange nach möglich größter Ergründung der Warheit nichts übrig, als hinzuweisen, und zwar nicht blos auf einige Stellen, sondern auf die ganze Schrift: Beweis, daß unter allen möglichen Zalen- und diesen gleichartigen TheilungsSüstemen nur dasjenige das einzig vollkommene Süstem ist, in welchem jede höhere Einheit aus taun (zwölf) nächst niedern Einheiten bestehet. Denkenden Menschen geweihet. (1060.) 1800. Leipzig. Und auf meine Teliosadik 1. Theil (1060.), der 2te folgt bald.

Einmaleins oder Merfache des AchtZalenSüstems.

1	2	3	4	5	6	7	10
2	4	6	10	12	14	16	20
3	6	11	14	17	22	25	30
4	10	14	20	24	30	34	40
5	12	17	24	31	36	43	50
6	14	22	30	36	44	52	60
7	16	25	34	43	52	61	70
10	20	30	40	50	60	70	100

Einmaleins oder Merfache des Oelf= (Mor=) ZalenSüstems.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	ε	10
2	4	6	8	ε	11	13	15	17	19	20
3	6	9	11	14	17	1ε	22	25	28	30
4	8	11	15	19	22	26	2ε	33	37	40
5	ε	14	19	23	28	32	37	41	46	50
6	11	17	22	28	33	39	44	4ε	55	60
7	13	1ε	26	32	39	45	51	58	64	70
8	15	22	2ε	37	44	51	59	66	73	80
9	17	25	33	41	4ε	58	66	74	82	90
ε	19	28	37	46	55	64	73	82	91	ε0
10	20	30	40	50	60	70	80	90	ε0	100

Einmaleins oder Merfache des NeunZalenSüstems.

1	2	3	4	5	6	7	8	10
2	4	6	8	11	13	15	17	20
3	6	10	13	16	20	23	26	30
4	8	13	17	22	26	31	35	40
5	11	16	22	27	33	38	44	50
6	13	20	26	33	40	46	53	60
7	15	23	31	38	46	54	62	70
8	17	26	35	44	53	62	71	80
10	20	30	40	50	60	70	80	100

Einmaleins oder Merfache des ZenZalen-Süstems.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	27	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Ein=

Einmaleins oder Merfache des sogenannten Tanneins- (Dreizen-) ZalenSüstems.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	ε	ϙ	a	10
2	4	6	8	ε	a	11	13	15	17	19	1ϙ	20
3	6	9	a	12	15	18	1ϙ	21	24	27	2ε	30
4	8	a	13	17	1ϙ	22	26	2ε	31	35	39	40
5	ε	12	17	1a	24	29	31	36	3ϙ	43	48	50
6	a	15	1ϙ	24	2ε	33	39	42	48	51	57	60
7	11	18	22	29	33	3ε	44	4ϙ	55	5a	66	70
8	13	1ϙ	26	31	39	44	4a	57	62	6ε	75	80
9	15	21	2ε	36	42	4ϙ	57	63	6a	78	84	90
ε	17	24	31	3ϙ	48	55	62	6a	79	86	93	ε0
ϙ	19	27	35	43	51	5a	6ε	78	86	94	ε2	ϙ0
a	1ϙ	2ε	39	48	57	66	75	84	93	ε2	ϙ1	a0
10	20	30	40	50	60	70	80	90	ε0	ϙ0	a0	100

Einmaleins oder Merfache des sogenannten Vierzen- (oder Taunzwei-) ZalenSüstems.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	ε	ϙ	a	b	10
2	4	6	8	ε	a	10	12	14	16	18	1ε	1a	20
3	6	9	a	11	14	17	1ε	16	22	25	28	2ϙ	30
4	8	a	12	16	1ε	20	24	28	2a	32	36	3ε	40
5	ε	11	16	1ϙ	22	27	2a	33	38	3b	44	49	50
6	a	14	1ε	22	28	30	36	3a	44	4ε	52	58	60
7	10	17	20	27	30	37	40	47	50	57	60	67	70
8	12	1ε	24	2a	36	40	48	52	5ε	64	6a	76	80
9	14	1b	28	33	3a	47	52	5ϙ	66	71	7ε	85	90
ε	16	22	2a	38	44	50	5ε	66	72	7a	88	94	ε0
ϙ	18	25	32	3b	4ε	57	64	71	7a	89	96	ε3	ϙ0
a	1ε	28	36	44	52	60	6a	7ε	88	96	ε4	ϙ2	a0
b	1a	2ϙ	3ε	49	58	67	76	85	94	ε3	ϙ2	a1	b0
10	20	30	40	50	60	70	80	90	ε0	ϙ0	a0	b0	100

Ein-

Einmaleins oder Merfache des sogenannten Funfzen= (Taundrei=) ZalenSüstems.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	ε	ϙ	a	b	c	10
2	4	6	8	ε	a	c	11	13	15	17	19	1ϙ	1b	20
3	6	9	a	10	13	16	19	1a	20	23	26	29	2a	30
4	8	a	11	15	19	1b	22	26	2ε	2c	33	37	3ϙ	40
5	ε	10	15	1ε	20	25	2ε	30	35	3ε	40	45	4ε	50
6	a	13	19	20	26	2a	33	39	40	46	4a	53	59	60
7	c	16	1b	25	2a	34	3ϙ	43	4ε	52	59	61	68	70
8	11	19	22	2ε	33	3ϙ	44	4a	55	5b	66	6c	77	80
9	13	1a	26	30	39	43	4a	56	60	69	73	7a	86	90
ε	15	20	2ε	35	40	4ε	55	60	6ε	75	80	8ε	95	ε0
ϙ	17	23	2c	3ε	46	52	5b	69	75	81	8a	98	ε4	ϙ0
a	19	26	33	40	4a	59	66	73	80	8a	99	ε6	ε3	a0
b	1ϙ	29	37	45	53	61	6c	7a	8ε	89	ε6	ϙ4	a2	b0
c	1b	2a	3ϙ	4ε	59	68	77	86	95	ε4	ϙ3	a2	b1	c0
10	20	30	40	50	60	70	80	90	ε0	ϙ0	a0	b0	c0	100

Einmaleins oder Merfache des sogenannten Sechzen= (oder Taunvier=) ZalenSüstems.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	ε	ϙ	a	b	c	d	10
2	4	6	8	ε	a	c	10	12	14	16	18	1ε	1a	1c	20
3	6	9	a	d	12	15	18	1ϙ	1c	21	24	27	2ε	2b	30
4	8	a	10	14	18	1a	20	24	28	2a	30	34	38	3a	40
5	ε	d	14	19	1c	23	28	2b	32	37	3a	41	46	4ϙ	50
6	a	12	18	1c	24	2ε	30	36	3a	42	48	4c	54	5ε	60
7	c	15	1a	23	2ε	31	38	3d	46	4b	54	5ϙ	62	69	70
8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78	80
9	12	1ϙ	24	2b	36	3d	48	51	5ε	63	6a	75	7c	87	90
ε	14	1c	28	32	3a	46	50	5ε	64	6c	78	82	8a	96	ε0
ϙ	16	21	2a	37	42	4b	58	63	6c	79	84	8d	9ε	ε5	ϙ0
a	18	24	30	3a	48	54	60	6a	78	84	90	9a	ε8	ϙ4	a0
b	1ε	27	34	41	4c	5ϙ	68	75	82	8d	9a	ε9	ϙ6	a3	b0
c	1a	2ε	38	46	54	62	70	7c	8a	9ε	ε8	ϙ6	a4	b2	c0
d	1c	2b	3a	4ϙ	5ε	69	78	87	96	ε5	ϙ1	a3	b2	c1	d0
10	20	30	40	50	60	70	80	90	ε0	ϙ0	a0	b0	c0	d0	100

Einmaleins oder Merfache des TaunZalenSüstems.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	ε	ϙ	10
2	4	6	8	ε	10	12	14	16	18	1ε	20
3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29	30
4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38	40
5	ε	13	18	21	26	2ϙ	34	39	42	47	50
6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56	60
7	12	19	24	2ϙ	36	41	48	53	5ε	65	70
8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74	80
9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83	90
ε	18	26	34	42	50	5ε	68	76	84	92	ε0
ϙ	1ε	29	38	47	56	65	74	83	92	ε1	ϙ0
10	20	30	40	50	60	70	80	90	ε0	ϙ0	100

Hier die Angabe, zu welcher Gattung und Art jedes ZalenSüstem gehört, in der Ordnung, wie sie nach der immer um eins größern GrundZal auf einander folgen:

2 3 4 5 6 7 8 9 ε ϙ 10

a a aa a ab a aaa aa ab a aab

2.2 2.3 2.2.2 3.3 2.5 2.2.3

11(13) 12(14) 13(15) 14(16) 15(17) 16(18) 17(19) 18(20) 19(21)

a a.b a.b a.a.a.a a a.a.b a a.a.b a.b

2.7 3.5 2.2.2.2 3.3.2 2.2.5 3.7

1ε(22) 1ϙ(23) 20(24) 21(25) 22(26) 23(27) 24(28) 25(29) 26(30)

a.b a a.a.a.b a.a a.b a.a.a a.a.b a a.b.c

2.ϙ 2.2.2.3 5.5 2.11 3.3.3 2.2.7 2.3.5

27(31) 28(32) 29(33) 2ε(34) 2ϙ(35) 30(36) 31(37) 32(38) 33(39)

a a.a.a.a.a a.b a.b a.b a.a.b.b a a.b a.b

2.2.2.2.2 3.ϙ 2.15 5.7 2.2.3.3 2.17 3.11

34(40) 35(41) 36(42) 37(43) 38(44) 39(45) 3ε(46) 3ϙ(47) 40(48)

a.a.a.b a a.b.c a a.a.b a.b.b a.b a a.a.a.a.b

2.2.2.5 2.3.7 2.2.ϙ 2.33 2.1ϙ 2.2.2.2.3

41(49)

41(49) 42(50) 43(51) 44(52) 45(53) 46(54) 47(55) 48(46) 49(57)
a.a a.b.b a.b a.a.b a a.b.b.b a.b a.a.a.b a.b
7.7 2.5.5 3.15 2.2.11 2.3.3.3 5.9 2.2.2.7 3.17

4ε(58) 4ϱ(59) 50(60) u. ſ. w.
a.b a a.a.b.c
2.25 2.2.3.5

Einmal abgesehen von der für jedes dieser ZalenSüsteme (als besondern RechnenFormen) erforderlichen Nomenklatur, so wird jedem einiger Maßen denkend vergleichenden Menschen die Vergleichung der 4 vor- und nur der vier nach dem TaunZalenSüstem nachfolgenden ZalenSüsteme mit diesem und mit einander unter sich in Hinsicht — der kleinern und der größern Menge von zu erlernenden Merfachen der in jedem, ersten 10 einzifferigen Zalen, in jedem — der Leichtigkeit oder Schwerfälligkeit der Perioden oder Kreiße des Zälens nach ein und eben derselben Zal stets zu sich selbst, in diesem ZalenSüsteme hier oder in jenem dort; — dieser Menge verschiedener Zäl-Perioden (der 10 Zalen) und ihrer gradativen Leichtigkeit insgesammt; — der, bei größern Zalen zu ser Raum wegfressenden, zu geringen Anzal von Ziffern oder einzifferigen Zalen der (vier) vorfolgenden kleinern ZalenSüsteme und der RechnenWeise darnach — und gegentheils der Zeit vergeudenden RechnenWeise bei zu großer Anzal von Ziffern der (vier) nachfolgenden, immer schwieriger zu lernen und zu behalten werdenden Zalen- und RechnenSüsteme; — in Hinsicht der weitläuftigern oder kürzern, schnellern oder schwierigern Erkennbarkeit der rationalen Theilbarkeit der Zalen durch die ersten 10 Zalen und einige ihrer Fakten, — der größern oder geringern Leichtigkeit des praktischen Gleichtheilens der Dinge nach derselben Zal von Theilen; — in Hinsicht der aus der Basis sich ergebenden Menge und Leichtigkeit der in Süstem-Brüche verwandelbaren gemeinen Brüche —

Kurz alles dies — meine Schrift: Beweis, daß unter allen möglichen ZalenSüstemen u. s. w. in Händen und ganz im Gedächtniß und vor Augen — philosophisch berechnend wol erwogen — kann kein Zweifel mer über die absolute Vollkommenheit der RechnenWeise (als eine der frei zu wälenden Formen) nach dem TaunZalenSüsteme und mit und nach dem TaunTheilungs-

Süsteme

Süsteme aller Dinge und Sachen des gemeinen Lebens obwalten. —

Für was mag wol derjenige zu halten seün, der den Menschen die erkannte Warheit des Zeit- Raum und Kräfte unendlich ersparenden Rechnens und Gleichtheilens der Dinge nach der Teliosadik vorenthält oder saumseelig verschweigt; — oder aus der unchristlichen Mutlosigkeit oder aus Uebelsinn zagt, das Geständniß öffentlich abzulegen, sie erkannt zu haben und zu erkennen, damit er des Hand ans Werklegens zum Einfüren in seinem WürkungsKreiße überhoben bleibe? —

Sicher werden es weise Obrigkeiten gerne sehen, wenn gefülvolle Männer bei jugendlicher Kraft still für sich das Leren der Teliosadik beginnen, sie werden sie gewären lassen und einst wol gar selbst belonen. — Heil dem Lande, wo dieses statt findet!!! —

Was bedarf es also wol eines triftigern Beweißes für die UrVollkommenheit des TaunZalenSüstems und des TaunTheilungsSüstems aller Dinge und Sachen, wiefern sie einer willkürlichen Untereintheilung unterworfen werden!! — Was bedarf es also einer triftigern Aufforderung zur Beginnung der allgemeinen Einfürung durch Leren in der Schule und in BildungsAnstalten der Jugend!! —

Anmerk. Nur durch das Anschauen und Vorstellen vieler Pflanzen, vieler Thiere und nicht blos einer einzigen Pflanze oder eines einzigen Thieres schlechthin, nur durch das Konstruiren nicht blos Eines einzigen Triangels oder Einer geometrischen Figur, sondern von wenigstens zwei oder merern zugleich und nur durch die Reflexion auf diese erlangen die Menschen erst den Begriff der Pflanze, des Thiers, des Triangels oder der Figur, und nur dadurch kann man allein in den Zöglingen den gleichen Begriff erwecken. Durch das Studium von nicht blos Einer, sondern allein von zwei oder merern Sprachen gelangt ihr erst zu SprachGesetzen. — Zwei oder merere Sprachen achtet man nötig, den Kindern erlernen zu lassen; ihr findet dies alles absolut notwendig und nützlich. Ihr findet es nicht absurd, euere Kinder mit der Erlernung mererer (todter) Sprachen zu quälen, um allumfassende Einsichten zu erwecken. Hönt ihr hier nicht der menschlichen Trägheit! — ? — Allein die eben so gerechte und noch unzälig nützlichere Früchte bringende Forderung der Erlernung und Lernng des Rechnens von nur zwei Zalen-Süstemen weißt man hönend von sich. Wo liegt Absurdität? — Man verlangte von mir die Entsagung des Lerens des vollkommenen TaunZalenSüstems; man verlangte von mir Verleugnung der Warheit von der Vollkommenheit des Rechnens mittelst zwölf Ziffern, — weil dies mir und andern nichts nützen

könne

könne und dennoch verlangte man die Erlernung und den Gebrauch der alten oder gelerten Sprachen, weil man sich da leichter und vollkommener deutlich machen könne. Macht der Gebrauch eines oder der mererer ZalenSüsteme die Gesetze des Rechnens mer oder minder klar? — Ich werde daher stets die Gesetze der Arithmetik an der Dekadik und an noch zwei andern ZalenSüstemen zeigen. In der Praksis sind und bleiben die stetigen Eintheilungen in zwölf gleiche Theile die leichtesten, in zene die ungemein schwersten, sollen jene wegen der gebräuchlichen Form diesen weichen, da sie doch der ungemein leichtesten Form zugehören? —

Sind Forderungen der Entsagung vom Leren der Warheiten der Teliosadik an mich, nicht änliche, wie man sie an Christus, an Molay, an Luthern, an Galiläus, an Kopernikus und an Andern über ihre Leren that? — Für kleinliche, konkrete, tastbare Berichtigungen kann man in Enthusiasmus geraten, für allumfassende ist man gelämt, unempfindlich, widerspenstig. — Ist der ein Arzt zu nennen, der nur Eine Krankheit beobachtete und glücklich zu behandeln weiß und sonst keine? Woher kommen denn die vielen schlechten Rechner, die nicht einmal eigene gemeinste ökonomische Aufgaben richtig berechnen können; als daher, daß ihnen höchst einseitig die Gesetze des Rechnens an und nach der unvollkommenen Dekadik durch merere ihnen blos vorgerechnete Beispiele von Jugend auf gezeigt wurden? —

Flucht und hönt man ewig dem Urheber und der Anname der Vollkommenheit des Rechnens mittelst zwölf Ziffern und des stetigen zwölftheiligen Theilens durch unterlassene Einfürung mittelst eigener Trägheit und mittelst dem Vorschützen der Trägheit anderer — o so kann rückkeren ewiger Fluch und Hon auf alle bereits ins Handeln übergeflossene Warheiten und Vollkommenheiten! — ewige Finsterniß hereinbrechen über alle Völker wie eine reißende MeeresFlut oder FeuersGlut in der Mitte der Nacht! —

Was folgte vor 1800 Jaren, als die Trägheit und der Starrsinn eines Volkes den Leren der Weisheit und Warheit eines für sie leidenden Weisen fluchte? ward es nicht in alle Länder zerstreut und verflucht und verhönt von allen? mußte nicht jeder sein Leben verzollen? — o Nationen, ein warnendes Beispiel! —

Nachrede am Schluß.

Gütige Leser mögen nun selbst urteln, ob das TaunZalen- und TaunTheilungsSüstem aller Dinge und Sachen, das man noch immer Dodekadik schlechtweg zu nennen, trotz meiner häufigsten unwiderlegbaren Protestationen und Ableitungen, so kleinlich sich geberdet, schon

längst

längst jedem Mathematiker bekannt — ich sage in der Würklichkeit — bekannt war und Er vertraute Bekanntschaft von ihm und mit ihm sich rümen könne und dürfe, wann und wie er von seinem Abgott von vollkommenen ZalenSüsteme, d. h. von seiner Dekadik in den allgemeinen Ausdruck: —

$$\alpha.10^n + \beta.10^{n-1} + \gamma.10^{n-2} + \ldots.$$
$$\varkappa.10^{(n-n)} + \lambda.10^{(n-n-1)} + \mu.10^{(n-n-2)} \ldots.$$
$$= \alpha(2.5)^n + \beta(2.5)^{n-1} + \gamma.(2.5)^{n-2} + \ldots.$$
$$+ \varkappa(2.5)^{n-n} + \lambda(2.5)^{(n-n-1)} + \mu(2.5)^{(n-n-2)} \ldots.$$

statt $2.5 = 10$ setzte a und erhielt

$$\alpha a^n + \beta a^{n-1} + \gamma a^{n-2} + \ldots + \varkappa\alpha^{n-n} + \lambda a^{n-n-1} + \mu a^{n-n-2} \ldots.$$

welcher bekanntlich jedes (andere) ZalenSüstem unter sich begreift, die Dekadik wie die Tetradik, Taunadik? — Ob dies Bekanntschaft mit der Teliosadik heißen könne? — Ob das Bekanntschaft mit dem TaunZalen- und RechnenSüsteme heißen könne, wenn man nach dem eigentlichen Duodezimal- oder dodekadischen Süsteme stetig ab- und eintheilt und die GrundMenge, zweimal sechs gleich zwölf, auch durch 12 (dekadisch) schreibt und ausspricht und z. B. die taunadische Zal ϱ68ε43ϱϱ1, düodekadisch so 11,06,08,10,04,03,11,11,01 schreibt und schrieb; — und unter dieser düodekadischen Form alle sogenannten RechnenSpezies oberflächlich entwickelt, vorträgt und ausübt?!? —

Man urtele selbst: ob alle folgenden Verrückungen in der neuen allgem. teutschen Bibliothek und andern gelerten Zeit., die man mir gemacht hat und die ich auf Ere vorher noch nicht kannte; ob das Erfindung oder WissenSchöpfung der Taunadik, geschweige der Teliosadik (d. h. des allein theoretisch und praktisch vollkommenen Rechnens) verdiene genannt zu werden. Wenn ein Leibnitz in seinen Mem. de l'Acad. Roy. des Scienc. pour l'an 1703. p. 108. sagt: Si on etoit accoûtumé à aller par *douze*, ou par *seize*, il y auroit encore plus d'avantage: — Wenn ein Heilbronner in histor. mathes. univ. I. V. C. 2. p. 874-882. Lipf. 1742. 4. maj. die Möglichkeit (weiter nichts?! —) einer

ner solchen taunadischen Rechnenkunst theils aus der tetradischen des Weigel, theils aus der düadischen des Leibnitz behauptet: Wenn erst auf Leibnitz'ens Veranlassung Gelegenheit nemen konnte ein Weidler, eine — Skiagraphie — ein Todten-Gerippe — von der sogenannten dodekadischen Rech(n)en-Kunst zu geben, jedoch beileibe "nicht in der Absicht zu geben, als seü das Duodezimal-Süstem (freilich dies nicht, siehe meine erste allg. Rechnen-Lere oder Rechnen-Kunst für und nach jeglicher stetigen Eintheilung mittelst der Dekadik. 1804.) dem der dekadischen Arithmetik vorzuziehen; sondern nur zu zeigen, daß man in allerlei Arten des Zälens rechnen könne, wie schon bei den Thraziern der Fall wäre, welche mit vier Karakteren ihre arithmetische Beschäftigungen verrichteten, wie Aristoteles sagt, Problem. Sect. XV. in Op. omn. T. II. p. 572.: ob dies verdiene geistige Erfindung und organische Wissen-Schaffung der Taunadik und Teliosadik genannt zu werden: wenn, aus angestammter Größe und Kleinheit, des Zeichens des Großen und Kleinen ein Weidler sich daher zur Ergänzung der, in der Dodekadik annoch felenden beiden Karaktere bedient, und schreibt: (De praestant. arithmet. decad. §. XVII. p. 28-30. Wittenb. 1719. 4.)

Dodek.: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ∠, ∧, 0.
statt der Dekad.: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
(Drei äußerst ingeniöse Bezifferungen!) auch vielleicht eine Tafel von todter Beieinanderstellung der ersten 150 Zalen nach beiden Süstemen giebt: wenn ferner ein Vellnagel zu Anfang des vorigen Jarhunderts in seiner Schrift: *Vellnagel* numerandi method. seu Arithmeticae omnes possibiles. P. LXXXIX auf einer Quart-Seite one alle eigentümliche Nomenklatur unter folgender Aufschrift: Numeratio in calculo Duodenaria das abdrucken läßt, was wir F. 6. der Kupfertafel der korpulenten Ziffern wegen mußten in Kupfer stechen lassen?

Freilich war bei diesen todten Produkten ein Blitzen, aber auch nur ein ser schwaches Blitzen von lebendiger Taunadik? ein Hinschreiben der ersten zwei oder zwölf Taune — und — weiter — nichts — mit den so höchst verkrüppelten oder verwerflichen Bildern, oder Zalen-Karakteren wie die beiden Ziffern links F. 6. oder wie ∠, und ∧, für meine ε und ϱ als Ziffern, welche benebst der Nomenklatur zu verhunzen und zu verstellen sich in öffentli-

chen ZeitSchriften die Referenten z. B. im Mag. encycl. durch S und Φ oder in der Neuen teutschen Bibliothek 68. B. 2. St. 7. Heft durch ε und ρ emsig angelegen seün lassen. Sie alle hätten diesem WetterLeuchten, denn mer war es nicht, weiter nachforschen, sie hätten mer in ihm eindringen sollen, sie hätten es in SonnenLicht durch Schaffen, durch WissenSchaffen zu einem ganzen Lande, das sie in allen Richtungen durchstreift und ausgemessen, mit zurechtweisender Nomenklatur versehen hätten, zu einem ganzen süstematischen Gebäude ausbilden, wissenschaffen sollen, — wie es vom reinen Rechnen one Anwendung aufs praktische Leben im I. Theil der Teliosadik und mit aller möglichen Anwendung darauf in Horstig's DuodezimalSüstem und im 2ten der Tel. geschehen ist. — Nur derjenige, der dies zuerst that, ist als Erfinder, als erster Schöpfer dieses ZalenSüstems zu halten: — — Sind die Braminen, welche nur gewissen Menschen, die einer gewissen Gottheit und ihnen brav opfern, sind die Hollsteiner und Ostfriesischen LandBauern, welche sich selbst die KuhPocken als SchutzPocken gegen die MenschenPocken einimpften, oder ist der später durch Nachdenken darauf gekommene große Jenner in England der Urheber der Ausrottung der MenschenPocken, sagt — oder sind es jene? —

Nur derjenige, der aus jenen (von mir) aufgestellten philosophischen und mathematischen Prinzipien von Arithmetik und somit die vollkommenste (wie in der Schrift: Beweis, daß unter allen möglichen ZalenSüstemen u. s. w. und wie hier und in der Teliosadik selbst bewies, für sich und für jedermann in der Teliosadik wissenschuf und ins gemeine Leben auf alle Dinge angewandt einfürte, darf und kann Anspruch auf den Namen des ersten WissenSchöpfers der Teliosadik, d. h. des theoretisch und praktisch gerechten, waren, und vollkommensten Zalen- und TheilungsSüstems machen.

Kann hier noch ein bloßes Glauben der absoluten Vollkommenheit der Taunadik vor allen andern ZalenSüstemen obwalten, wo ein ewig unantastbarer Beweis derselben in meiner Schrift: Beweis, daß unter allen möglichen ZalenSüstemen u. s. w. philosophisch und hier mathematisch gefürt worden ist? — Und dennoch erkünt sich ein Rez. meiner Teliosadik in der Leipziger Lit. Zeit. 1803. No. 247. S. 700 und in der n. allg. t. Bibl. 68. B. 2. St. 7. H. diesen Beweis absichtlich zu ignoriren

und

und ersterer bei mir vom Glauben zu reden, wo feste unerschütterliche Ueberzeugung und Gewißheit aus gründlicher Wissenschaft, die ihm mangelt, herrscht? — Erkünt sich der Rez. mir noch folgende zwei Fragen vorzulegen?

"1) Angenommen, er (ich) habe den Vorzug der Do„dekadik vor dem DezimalSüstem bewießen, — wie folgt dar„aus, daß sie das allein vollkommene unter allen Zalen„Süstemen seü? daß nicht noch irgend ein anderes eben „so vollkommenes oder ein noch vollkommeneres möglich „seü?" —

"2) Was heißt auf dem Titel des Buches das Wort „erfunden? Im eigentlichen Sinne kann es nicht genom„men werden. Denn die Dodekadik war schon längst je„dem Mathematiker bekannt, so wie die allgemeine (obige) „Formel jedes ZalenSüstem unter sich begreift."

Steht denn nicht auf dem besondern TitelBlatte für den ersten Theil der Teliosadik, der blos vom TaunZalen„Süstem handelt: Erfunden, entworfen u. s. w. und gegentheils aber auf dem GesammtTitelBlatte links, wo vom TaunZalen- und TheilungsSüsteme die Rede ist: Zuerst erfunden, entworfen u. s. w. Was will denn das sagen? — Liegt hierin kein Bescheiden? —

Man kann in ein und eben derselben No. derselben Leipziger Lit. Zeitung eine Anzeige von der Teliosadik, darauf die einer Schrift von Abel Bürja und darnach die jenes Beweißes, daß unter u. s. w. 1800 absichtlich abdrucken lassen —?! — absichtlich abdrucken lassen (da doch diese Schrift ein halbes Jar früher als die Teliosadik erschienen ist, ihr Vorläufer war, und vor dieser, diese unmittelbar nach ihm wie in andern Blättern, hätte schon längst angezeigt werden sollen, und zwar in dem Jare der Erscheinung beider im BuchHandel nach den öffentlich von der Redaktion gethanenen Versprechen)?! — Was soll man von diesem abscheulichen chikanösen Verfaren urteln? — soll man es seinem in sich selbst tragenden Fluch überlassen? — Und so kann man auf einer so gerümten Universität Kursachsens handeln? — Ist so etwas nicht wider Luther's Geiste gehandelt? — auf die ein Reichhardt in Dresden in seinen Predigten von Neuem so ser hinweißt? — Dieser Rez. kann beginnen bei der Anzeige der Teliosadik: "diese Schrift enthält weiter nichts — (weiter nichts?) „als eine Darstellung der Dodekadik (?!!) und

„eine

„eine notdürftige Anweißung nach diesem ZalenSüste„me zu rechnen. Der Verf. glaubt in diesem Süsteme „große Vorzüge vor der Dekadik zu finden, und erwartet „von der Einfürung desselben viel Heil und Seegen. Er „ist davon so überzeugt, daß er die allgemeine Verbrei„tung desselben durch bürgerliche ZwangsGesetze bewürkt „wissen will?" —

Notdürftige Anweißung?!? — Das Rezensiren oder wer weiß was muß eben dem Rez. notdürftig geworden seün, so daß seine Phantasie ihm diesen Streich spielte. Doch was sagen sie dazu: wenn sie in derselben No. 247. Leipz. Lit. Zeit. nur S. 703 in der Rezension des Beweißes lesen, daß das TaunZalenSüstem hier in diesem Beweiße, daß u. s. w. populär vorgetragen seü. — Da muß auch bei Gott Busse's gemeinverständliches RechnenBuch eine notdürftigere Anweißung des dekadischen Rechnens seün, wornach man sich richtete und das es bekanntlich nicht ist.

Ein Rez. in der Erl. Lit. Zeitung No. 28. Jar 1802. sagt von der Teliosadik eine ausfürliche und leichtfaßliche Darstellung des Taun- oder ZwölfZalenSüstems. Sie enthält alle RechnungsArten mit ganzen und gebrochenen Zalen. Die Vortheile, die aus der Vergleichung des periodischen Ganges der Merfachen nach beiden Süstemen hervorgehen, sind, die einzige Zal fünf ausgenommen, für das TaunSüstem entschieden. Ob die große Mühe, welche u. s. w.

Glaubt?!? Möchte nur jeder öffentlich authorisirte Glaube auf so festen Pfeilern ruhen, wie hier der unsrige, dann sähe es um Jeden gut aus. — Wie soll man anders solchen Menschen begegnen, die Vernunft haben und mit ihr handeln sollten — aus absoluter Halsstarrigkeit vernünftige Forderungen ignoriren, als wie Vernunftlosen durch bürgerliche Gesetze. —

Was jener Rez. in der Leipziger Lit. Zeit. weiter in der Anzeige des Beweißes spöttisch sagt und zerfetzt außer dem Sinne und Zusammenhange heraushebt, ist in den Augen eines Gewissenhaften und Religiösen unter aller Verachtung; was soll der Religiöse auch von solchem offenbaren Lästerungen und Meineide gegen Gott, Christus und die Menschheit sagen, indem jeder Christ, jeder ächt Religiöse, von was für Kultus er seü, heilig und theuer an Gottes Altar versprochen, geschworen hat, nichts Unvollkommenes,

menes, nichts der unnützen Verschwendung irgend eines köstlichen Gutes Gleichendes an und in sich und andern zu dulden, one dessen Abschaffung sogleich zu beginnen. — Jene fällen über sich seibst das Urtheil: die Warheit früher erkannt haben wollen und aus Feigheit vor den unüberwindlich scheinenden Schwierigkeiten der Verdrängung eines allgemein verbreiteten, andern, höchst unvollkommenen Süstems, sie blos gefült und sie einmal vielleicht oberflächlich gesagt zu haben, dahin gestellt seün lassen.

Wir versprachen doch gleich in unserer zweiten Schrift, von Zeit zu Zeit als Anhang der Schriften der Nachwelt die Dokumente der Art der Aufname und der dem philosophischen ZeitAlter zur Ere gereichenden Anfeindungen des vollkommenen RechnenSüstems zu einer Geschichte derselben zu überliefern, unter diese Kategorie gehören viele Stellen der Rezension der Teliosadik in der n. allg. d. Bibl. des Hrn. Nikolai, von der es uns wundert, daß sie der Tel. nicht auch fluks den Jesuitism und Illuminatism u. dergl. angerochen hat, da sie doch folgendes sagen konnte: "Rez., „der gewiß keinen geringen Theil (versteht sich) an der N. A. „D. B. nimmt, hat lange kein Buch gesehen, daß ihn, „in Ansehung des literarischen Werts oder Unwerts, und „in Betracht der Anmaßung und bisweilen an Unsinn (Unsinn! nun den sollen wir ja nach hohem Ausspruch onehin denken) „gränzenden Frechheit des Verf. so verlegen „gemacht hat, wie die vorliegende Teliosadik, ein „Wort, das wir im Grunde eben so wenig kennen, und „richtig zu analüsiren verstehen, als das Wort Taun!" (Nun wird über das Wort Teliosadik mittelst griechischer und hebräischer Sprach-Kunde gegrübelt.) Auch wird dann vom Rez. versichert, daß er überzeugt seü, daß mir weder der Kauf- noch HandWerksMann, weder der Gelerte noch Mathematiker im TaunZalenSüsteme, und der damit verbundenen ächt babülonisch n BombastSprache folgen werde." Denn (nun weiß man nicht, ob mitleidig Lachen oder Weinen über den so leicht im Kapitole des Rez. entstandenen babülonischen BombastBeweis seiner Verwirrung) um davon einen kleinen Beweis der NamensVerwirrung zu geben, wollen wir einige Stellen aus dem Einmaleins des TaunSüstems anfüren: "nun werden acht Beispiele vom down mühselig abgehaspelt, und dann versichert, im R. Anz. wären die Gründe der Empfelungen der Teliosadik

sadik von andern mit hinlänglichen einleuchtenden Gründen verworfen worden, da sich doch keine Eule auf unsere letzten Worte weiter hören ließ. Man wird einst erstaunen, wie ein im Finstern schleichender teutscher Rez. eine gänzliche SprachVerwirrung bei einer notwendig ganz veränderten Nomenklatur fürs TaunZalenSüstem ängstlich fürchten konnte, und wie ein leichter fassender Franzose (wie wir weiter unten zu sehen bekommen) gerade darin jede zu fürchtende SpracheVerwirrung gleich andern beseitigt findet. Jener sagt: "der Nutzen der Theil„barkeit der zwölf und ihrer Potenzen u. dergl. ist bei wei„tem gegen den Nachtheil nicht aufzuwiegen, den allein „schon die SprachVerwirrung erzeugen würde, welche das „TaunWesen, wie wir aus einigen Benennungen schon ge„zeigt haben, zum unabänderlichen Begleiter hat, geschwei„ge an die Schwierigkeiten (?!?!) zu denken, welche das „Multipliziren, Dividiren, Ekstrahiren, und die Anwen„dung derselben auf das gemeine Leben und die gesammte „reine Mathematik, nebst den logarithmischen Tafeln ma„chen würde; anderer Unbequemlichkeiten, welche die de„kadische RechenKunst (also mit einem Rechen von zen Zinken? —) „vor der Teliosadik voraus hat, nicht einmal zu „erwänen." — "Damit aber der Verf. (ich) keine Ursa„che neme, sich über uns, jedoch unbilliger Weise zu be„schweren, als hätten wir seine Arbeit, one sie vorher aus„einander gesetzt zu haben, verurtheilt: — als wenn ein solcher Ideenreicher Rez. und Richter über mich ärmlich zu richten vermöchte? — „so wollen wir unsern Lesern den „wesentlichsten Inhalt dieses ser theuern Buchs vorlegen:"

Laßt sehen, wie diese Vorlegung beschaffen!

"Das Ganze wird in zwei Hauptttheile, nämlich in „ganze und gebrochene Zalen eingetheilt: Jene enthält in 7 Kapitel das Zälen nebst den gemeinen Spezies; „das 8te, 9te, 8te (10te), 9te (11te) [9te] und 10te (12te) „Kapitel die Vergleichung, Aufhebung, Theilbarkeit, und „die Spezies der Brüche, nebst der einfachen Verhältniß-Rechnung (Regel de tri) und die Beantwortung „aller möglichen Einwürfe und Gründe gegen die allgemeine Einfürung der Teliosadik und ihre triftige Widerlegung!!! — Sie stehen Jedem selbst zu lesen frei. „(Diese sind von S. 379-398 (398) [sogar die SeitenZalen des Buchs sind, wie die DruckerBogenSignatur, à la „Taun bezeichnet,] vorzüglich gegen die Einwürfe im „Reichs-

„Reichs Anzeiger f. 1800 gerichtet.) Der Verf. heßt „sie alle, und überall leicht und spielend. Allenthalben stößt man auf freie, oft an Frechheit gränzende „Anmaßungen." Ja wol einen nichts weniger als frech anmaßlichern Rez. kann es nicht geben! „Unter deren Menge wollen wir nur ein Paar ausheben. S. 365 zu unten: „Außerdem steht unser zeitheriges theoretisches astronomisches Süstem auf ser sandigem Boden, und wird seiner „Zeit ganz in seiner Gebrechlichkeit daliegen." Man lese nur den letzten Anhang dieser Schrift, und sehe, ob ich Unwarheit redete. "Was S. (394-398) 398-398 vorkömmt, enthält, wie die zu Ende des Buchs angehängte „Nachricht für BuchHändler und Nachdrucker, nur „erbärmliches Geschwätz, heillose Vorschriften, an die sich „keiner stören, noch an die armseligen Drohungen keren „wird." Ha! in einem State, worin durch das neue Land-Recht Jeder bei seinem Eigenthume gesichert und geschützt seün soll, wagt ein kritisches Blatt noch der Unrechtmäßigkeit des Nachdrucks zu spotten! — Rez. schließt mit einem recht tiefen StoßSeufzer: "Was würde der gute Mönch M. Planudes, der im XIIIten Jarhundert „die Dekadik bei uns einfürte, (s. *Mantucha* hist. des math. „T. I. p. 362.) dazu sagen, daß seine Arbeit, durch eine „Teliosadik zu verdrängen, beabsichtigt würde! — No."

Armer Planudes, ein anderer Moses mit der Decke, sage dazu, was die von deines Gleichen verdrängten altteutschen Priester der Herda und des DonnerGottes zur Verdrängung ihrer Lere sagten, und bedecke dich und deine Getreuen mit deiner K****nDecke.

Es thut mir ser leid, daß Herr Oberlin, Son, welcher eine so deutliche Idee von meinem Vorschlage einer vollkommenen Theilung der Zeit und des Kalenders seinen LandsLeuten zu geben wußte und die Vorzüge vor andern, selbst vor der neuen französischen, einsah, und es für notwendig hielt, mich zuvor seinen LandsLeuten als den Autor der Teliosadik bekannt zu machen, daß Hr. O. nur eine "legere" Idee von dieser nach dem höchst parteischen Urtheile der Rez. der allg. Lit. Zeit. No. 181. 1801. bei seinem Scharfsinne geben konnte, nach einer Rezension geben konnte, die ihre verdiente Beleuchtung in d. Int. Bl. der aufgehörten Erl. Lit. Zeit. No. erhielt; möchte er doch sich an das Studium meiner Schriften selbst machen und dann seinen LandsLeuten davon eine scharfsinnige gründliche Idee

bei seiner Vorurtelslosigkeit geben, dann würde er finden, daß ich mich weder griechischer noch lateinischer Buchstaben zu den beiden erforderlichen Ziffern bediene und für die taunadischen Zalen z. B. 200, 300, 800, 900, 1000 deux, trois, dix, meur, taun, unardes und nicht Deuxard, Troisard, Dixard, Meurard, Taunard sage, welche Worte den Zalen 100^2, 100^3, 100^8, 100^9 und 1000^{10} entsprechen. Er gebe unter andern seinen vifen LandsLeuten die von mir in einer Beilage der Göttinger gelerten Anzeigen gegebenen Beweise, und die hier in d. Schrift und sonst von mir gegebenen und er wird mit ihnen nicht mer an der absoluten Superiorität oder Vollkommenheit dieses Zalen- und TheilungsSüstems vor allen andern zweifeln, und daß es den Namen Teliosadik rechtmäßig verdiene, vielmer meinen Enthusiasm vereren und bei seinem Scharfsinn finden, daß meine, lächerlich genannten, Prätensionen, meine grausam und übertrieben gefundenen MaßRegeln Plaisanterien für seine LandsLeute waren, die mit nicht viel ungleichern Forderungen der Annahme ihres ser rapid entworfenen DezimalSüstems andern von ihnen besiegten Völkern bei den Waffen in den Händen zurückten. — Sind den Waaren, nach alten Maßen verkauft, nicht für den Fiskus konfiszirte bei ihnen und dergl. Wie waren denn die gebrauchten Mittel zur Einfürung des DezimalSüstems beschaffen? und damals setzte ich nur dergleichen Maksimen, die letzte hierarchische Krone, die Verbietung der Ehen, auf. Hierarchen, nur andern (Nicht-) Teliosadikern, ist ja auch die Ehe verboten: nur Schadloshaltung ward ungeandet gelassen; und so erlaube uns Hr. Oberlin ungeandet mit seinen Worten zu schließen:

Rien n'est plus ridicule, à la verité, que ces prétentions de M. W. ou de M. le P.; mais il faut les lui passer en faveur de sa bonne intention, et du zèle dont il est animé pour le bonheur de ses semblables, et qui n'a d'autre défaut que celui d'être outré. D'ailleurs, ces prétentions, cette espèce de charlatanisme, avec lequel M. W. ou M. le P annonce sa teliosadique, n'ote rien à la bonté même du système, et nous avouons que nous sommes nous mêmes très portés à lui accorder la préference sur la decadique. Mais nous ne voudrions pas, que les gouvernements, en se montrant disposés à introduire ce système dans leurs états, suivissent les conseils de son auteur, en brusquant la chose. Nous serions surtout fachés, qu'on

qu'on défendit le mariage pour cauſe d'ignorance dans la telioſadique. Malheur à l'Etat dans lequel on prendroit une ſemblable meſure! Bientot on verroit la population, au lieu de faire des progrès en plus, en faire de tres rapides en moins. Nicht doch! Läßt nicht der alte Adam im Menſchen gerade alles Verbotene ihm wollen und thun. — Hierarchen, denen das Ehen verboten war, ſorgten immer noch am beſten für Bevölkerung: Bonheur à des Etats dans les quels on prendroit une ſemblable meſure! Bientot on verroit la population, dans tous les Etats unies, au lieu de faire des progrès en moins, en faire de très-rapides en plus.

Anhang.

Die oben verſprochenen Briefe.

"Daß Sie, werter Freund, ſo gütig waren, uns zuvor Ihre deutlichere und ſchärfſte Entwickelung und abgenötigte Vertheidigung der alleinig gültigen Theorie der Verhältniſſe trigonometriſcher Linien, ferner Ihre die Differenzial- und IntegralRechnung und jeden ihn änlichen Funktions- oder DerivationsKalkul vernichtenden Angriffe, benebſt der warhaften Theorie und Entſtehung der Arithmetik oder ZalenLere überhaupt und jeder Arithmetik oder jedes ZalenSüſtems insbeſondere benebſt den Vorzügen des vollkommenſten vor allen andern zuzuſenden; war uns der ſtärkſte Beweis Ihrer Freundſchaft. Empfangen Sie bei dieſer Retourſendung des Mſptes unſern wärmſten Dank dafür.

Bei dem Himmel! Sie ſind es der Wichtigkeit des Gegenſtandes, der Warheit und Wiſſenſchaft, ſich ſelbſt und Andern ſelbſt ſchuldig, die Allgemeinheit, Warheit und Kürze Ihrer Theorie und Formeln und das Eigenthum Ihrer Erfindung und Ihrer Ihnen ganz eigenen Methode überhaupt ins helleſte Licht zu ſetzen, die Ungültigkeit und Unwiſſenſchaftlichkeit aller andern Theorien, auch der Ihnen ſo eben erſt durchs JarBuch bekannt gewordenen Theorie von Lagrange, die mer als die Ihrige leiſten ſoll, von allen Seiten aufgedeckt darzu legen. Sie werden der Ihrigen, ihre eben ſo gewiſſe Unantaſtbarkeit, als die der Teliosadik iſt, ſtreng darthun, denn mit welcher kleinlichen Intrigue hat man nicht neuerlichſt in der Leipz. Litt. Ihre Teliosadik und nach einer andern Schrift erſt Ihren

absoluten Beweis der Vollkommenheit derselben angezeigt und für chikandse oder einfältige Fragen bei Gelegenheit der einen Schrift aufgeworfen, deren Beantwortung sich längst in der andern fand.

Schreiten Sie one Weiteres sogleich zum Werke, erweitern Sie das uns Zugesandte, stellen Sie Ihre Grund-Sätze auf, bauen Sie darauf Ihre Kette von Schlüssen, und gehen Sie dann zur FeuerProbe der andern bekannten Theorien über.

Nicht weniger sind Sie es der Welt und sich selbst schuldig, mit der baldigen Herausgabe und völligern Ausarbeitung nicht zu zaudern, indem wir Ihnen freundschaftlich zu bedenken geben aus leidiger Vorsehung, daß einige eine und die andern Beschäftigungen und sonstige Umstände erheischen möchten, aus Pflicht fordern, Ihre Kräfte, Ihre zeither gehörige Muße bald abziehen zu müssen der Ausbildung und Ausarbeitung Ihrer philosophischen Süsteme, der drei Theile oder Zweige der Mathematik (sogenannten reinen) und der mathematischen NaturLere und Technik und auch Ihres Süstems der Philosophie und der Musik, daß Umstände, Gesundheit u. s. w. alles dies nicht mer gestatten möchten. —

Dieser Gründe wegen geben Sie eilend die Grund-Züge oder Keime zu diesen Süstemen, als solche auch nur, oder in mer oder minder streng ergründeten Prinzipien bestehend, der Welt hin one Vorenthalt. —

Geben Sie ihr die GrundZüge Ihrer ganzen RaumLere (Geometrie) in allen ihren Zweigen, ihrer BewegungsLere. Vorbehalten Sie der Mathematik nicht Ihre so schlichte und ganz aus der Natur der Linien sich ergebenden Rektifikationen der Kurven, wenigstens der sogen. KegelSchnitte, nach denen man so lange umsonst strebte. — Von Ihrer UrrechnenLere wenigstens die höchst allgemeine Theorie und Deduktion aller ZalenSüsteme, damit Sie doch endlich einmal die ewigen Praler von schon langem Bekanntseün und Gekanntsein des vollkommensten ZwölfZalen- und TheilungsSüstems mit Schamröte daheim schicken. Eilen Sie, dieses Ihr Vermächtniß für die mathematische Welt bald kund zu machen, ihr als ein edles Kleinod heiligst anzuvertrauen, ehe Schicksal und Umstände ein Anderes verhängen möchten — und Reue zu spät wäre. — Ueberlassen Sie dann dem höchsten Wesen und der Zeit, ob Ihnen

nen selbst oder ob Andern die weitere Entfaltung und Ausbildung dieser Keime oder GrundZüge zu mächtigen ewig wesenden Stämmen von mannigfaltiger Fruchtbarkeit vergönnt seün sollte. Sie werden mir vielleicht einst es Dank wissen, daß ich Sie zur Herausgabe der GrundZüge vermocht, auch die Welt wird günstig für Sie einst darüber urteln, wenn auch einige Mängel untergeschlichen wären. —

Z. in Frankr., im Mai 1803. Ihr Freund Meyer.

Sie, lieber Kollege und Freund! haben freilich ganz Recht, daß für Sie die Aussprüche Ihres Freundes und Mitkämpfers des Hrn. Superint. Horstig, was Ihre Teliosadik betrift, taunfach überwiegend für die Absprechungen und Anmaßungen ihrer Bekrittler seün müssen. Seine Worte beschämen diese alle *). Auch sind Sie für alle die Ihnen und Ihrer Methode angethanen Schmähungen in den Litt. Zeit. durch die einzige Anzeige Ihrer Deduktion in der Würzburger gelerten Anzeigen, die ich Ihnen anbei übersende, da ich weiß, daß sie Ihnen gewiß noch nicht zu Gesichte gekommen sind, belont: nur Schade für Sie, daß diese Blätter nicht das große Publikum wie jene über Sie Hergefallenen haben. —

Weil nur einer unter den merern Beweißen der Vollkommenheit des TaunZalen- und TheilungsSüstems aller Dinge oder des leichtesten RechnenSüstems mittelst zwölf Ziffern der absolutgültige oder der evidenteste seün kann, nämlich der reine Beweis, der aus der rein theoretischen Entwickelung des Grund-Satzes der Arithmetik schlechthin und aus der Ablei-

*) Er schrieb mir im Dez. 1801. vor seiner Reise nach Frankreich und England, die seine Gesundheit so zerrüttete. "Wie „ser haben Sie mich durch Ihre Teliosadik beschämt. Tau„send Beziehungen haben Sie mich erblicken lassen, worin „ich den Vorschlag zu einer bessern RechnungsArt (zu der „einzig vollständigen, wie Sie mit Recht sagen) noch nicht „gesehen hatte. Auf den Erfolg bin ich eben so erwartungs„voll wie Sie. Glauben Sie ja nicht, daß ich jemals auf„hören werde, die innigste Vererung für Sie zu empfinden. „Wer verdient sie unter den ZeitGenossen mer als ein Geist, „der sich über sein ZeitAlter so weit erhebt und überall so „tief eindringt, als der Ihrige. Jede neue Entfaltung Ih„res GedankenSüstems macht mir die lebhafteste Freude und „sichert Ihnen immer mer die Achtung Ihres aufrichtig er„gebenen Horstig."

leitung und Schöpfung jeder möglichen besondern Arithmetik entkeimt und den Sie, wie ich bestimmt weiß, im Geheim zu allererst aus Bedürfniß sich selbst sicher gefürt haben; so beschwören wir Sie alle, endlich einmal mit dieser Reserve hervorzurücken, Sie werden sich nur dadurch den Menschen als zweiten Kolumbus des zweiten Amerika's, des mathematischen, dokumentiren.

Die Triftigkeit der Ursachen der Zurückbehaltung ist aufgehoben. Den philosophischen Beweis der Vollkommenheit lieferten Sie in Ihrer Schrift: Beweis, daß unter allen möglichen ZalenSüstemen und diesen u. s. w. Leipzig 1801. (1601.). Sorgen Sie selbst oder lassen Sie vielmer Ihre mitdenkenden ZeitGenossen sorgen für einen naturphilosophischen oder phüsischen Beweis, den es auch geben kann oder vielmer muß, indem sich überall die Taunheit in der ganzen Natur ergeben oder zeigen wird, in ihren Arten, Gattungen, Geschlechtern, Spaltungen, Formen, Wesenheiten und zwar im Thier-, im Pflanzen-, wie im Mineral-Reiche, auf dieser Erde, wie im All und Aether; im Planeten, wie im Sattelliten-, im Sonnen-, wie im Milch-StraßenSüsteme. — Erwünscht, willkommen und vortheilhaft für die baldige Anname des TaunZalen- und TheilungsSüstems ist er gewiß: wozu er gerade viele Natur und Phüsik liebende Menschen auffordern wird; so wie warscheinlich geometrische Köpfe dazu am ehesten durch einen geometrischen Beweis, z. B. aus dem Zirkel (und dessen nur allein rationaler tauntheiliger (zwölftheiliger) Selbsttheilung) dem Triangel und andern Figuren und Linien angefeuert werden.

Was für Anspielungen der Erl. Rez. sich erlaubt, so bleibt es doch war, daß für Religiöse unter den Juden und Christen ein jüdisch oder christlich dogmatischer Beweis, gefürt aus der ganzen biblischen Geschichte alten und neuen Bundes, für diese Menschen triftige und auffordernde Gründe genug enthalten oder haben kann. Einen historischen Beweis haben Sie zum Theil in Ihrer Schrift Beweis, daß u. s. w. gegeben, noch mer wird er sich aus der alten Geschichte der ältesten Teutonischen Völkerschaften füren lassen, die stets bis zwölf und alles nach Dutzenden zälten und eintheilten, bevor sie arabische ZiffernSchrift und de-

ren

ren dekadische ZälWeise kannten. (Siehe Anton's Geschichte der Teutonen.) Der rein praktische Beweis ist und bleibt freilich nur durch und aus würklicher allgemeiner Praksis und Ausübung der Teliosadik, selbst in allen vorkommenden RechnenFällen des Lebens, zu füren möglich. Für jeden nur einiger Maßen nach- und weiter denkenden Menschen bleibt der nächst überzeugendste der theoretisch praktische Beweis, gefürt aus der Vergleichung und Beziehung der Teliosadik und Dekadik unter einander und der beiden TheilungsSüsteme der Dinge nach beiden unter einander.

Jetzt eilen Sie nur, den für Sie am überzeugendsten gebliebene Beweis, den reinen meine ich, der absoluten Vollkommenheit Ihres Süstems in Beziehung auf alle andere ZalenSüsteme in Ihren GrundZügen originaler alter und neuester Süsteme und Theile der Mathematik niederzulegen. —

Dieses alles bald von Ihnen gedruckt zu erhalten, ist unsere senliche Hofnung und ein Beweis Ihrer Beständigkeit gegen uns.

Z. in Frankr., im Juli 1803. Ihr Meyer.

An-

Anhang.

Zweifel über die zeitherige Theorie der Bewegung der WeltKörper.

Welche Astronomen, die alten griechischen, ein Ptolomäus, Hipparch, Eudoksus und Andere, oder die neuen, ein Keppler, Newton, Laplace und Andere, irrten mer und namen den Schein für das Ware in den Banen der WeltKörper? —

Einsehen thut sicher jeder denkende Mann als absolut war und nötig: kein WeltKörper kann sich kreißend um einen andern größern bewegen, wofern dieser nicht wiederum zugleich einen dritten noch größern umkreiße, der dritte einen vierten u. s. w. in immer größern KreisBanen. — Der Fürer schreibt den Trabanten ihre Banen vor durch die seinige. Warum? ist zu weitläuftig hier zu zeigen.

So was thut der Mond um die Erde, die Erde mit andern Planeten um die Sonne und diese um einen noch unbekannten Stern. — Der Fürer muß sich dabei zugleich um seine eigene Akse kreißen. Wie klein auch der Theil der der Sonne eigenen Ban seü in einem ErdJare, oder in einem JupiterJare; so ist es doch immer ein Etwas und bewürkt die Fortrückung der Aequinoktial- und Solstitial-Punkte allein, und dies schon beweißt, daß die ErdBan keine elliptische oder Ellipse seün könne, wie man behauptet; gesetzt, die Sonne durchlaufe eine Ellipse, die Ban der Erde muß eine Epizikel oder ein KnotenKreis seün, geschweige kann die MondsBan eine Ellipse seün, die eine KnotenKreisförmige inner jener der Erde ist. Aber warum

um seizte man die Sonne als stillestehend in einem Brenn-Punkte einer Ellipse, wenn doch Fortrücken von den Aequinoktial-Punkten und Abberationen für die Fortbewegungen der Sonne sprachen? —

Allein die Erde soll ja den 20-22 Dez. ihre Sonnen-Nähe, den 20-22 Jun. ihre Sonnen-Ferne haben, weil uns (Nord-Ländern) dort (im Winter) der Sonnen-Durchmesser am größten, hier (im Sommer) am kleinsten erscheine: allein den Süd-Ländern jenseits des Aequators erscheint er ja zur ersten Zeit am kleinsten und zur zweiten am größten und zwar in demselben Verhältniß, wie uns, in ihrem Sommer-Anfang am 20-22 Dez. am kleinsten, in ihrem Winter-Anfang am 20-22 Jun. am größten. — Man füre mir Beobachtungen dagegen an, wenn man kann. Zugleich und allzumal entfernt oder nähert sich die ganze Erde der Sonne dem einen, wärend sie sich dieser für den andern Bewoner nähert oder entfernt; also soll zu gleicher Zeit ein Entfernen und Nahen der Sonne und Erde statt finden, da muß der eine oder andere Körper sich in zwei Halbkugeln trennen, die gelegentlich zu den Tag- und Nacht-Gleichen zusammenfaren, um wieder in entgegengesetzten Richtungen auseinander zu gehen.

"Aber der größere und kleinere scheinbare Durchmesser"! ruft man entgegen. — Gut! giebt denn die Sonne und der Mond nicht auch einen größern Durchmesser beim Auf- und Untergange am Rande des Horizontes — und dennoch ist die Sonne vom Beobachter entfernter als beim Durchgange durch den Meridian. Die größere Brechung der Licht-Stralen beim größern Geneigtseün der Körper gegen den Rand des Horizontes durch die Atmosphäre unter größern Schiefen giebt in der Erscheinung das Gegentheil vom Würklichen.

Ellipse seü die Ban der Erde und die Sonne stehe in einem Brenn-Punkte: vom Winter zum Sommer überwältige die Zentrifugal-Kraft die zentripedale; darauf diese wieder jene. — Das kann nicht seän, wir sollten meinen (und werden es einst streng erweißen in geeigneten Schriften), wenn einmal eine die Ueberwucht bekommen habe und darin fortschreite; so müßte ein Mal die Erde um die Sonne aufkreißend ins Unermeßliche fliehen; das andere Mal in zukreißenden Spiralen in die Sonne hineinkreißen:

weil

weil kein Grund vorhanden ist, wie jemals wieder die stärker gewordene von beiden das Uebergewicht verlieren und von der andern überwältigt werden könnte. Gesetzt, es wäre die ErdBan eine elliptische, so müßten Früling- und Sommer-, desgleichen Herbst- und WinterViertelJare sich ganz gleich seün, was nicht ist; da vielmer diese vier ganz ungleichen ViertelJare deutlich auf eine EpizikelBan von Abend nach Morgen hin zeigen.

Auch soll uns (NordLändern) der Mond in der Erd-Nähe seün beim größten scheinbaren Durchmesser; beim kleinsten in der ErdFerne: allein den SüdLändern erscheint der MondsDurchmesser zu gleicher und eben derselben Zeit am kleinsten und am größten, wie er uns am größten und am kleinsten erscheint, sie ziehen daraus eine gleiche Schluß-Folge und so müßte sich auch der Mond in seinem Aequator spalten und dem einen sich nahen, dem andern fernen. Widerspruch wie oben. — Die Erscheinungen geben auch hierbei das Negative wie in der Bewegung der Sonne und Sterne um die Erde. —

Der ganze Körper bleibt gleichweit von seinem Zentral-Körper entfernt; gerade wenn der Durchmesser von Sonne und Mond am größten erscheint, ist der Beobachter dem Körper am abgewandtesten und der Beobachter auf der andern Hälfte unter gleicher Breite am zugewandtesten; das Gegentheil von dem, was die Erscheinung giebt. Die Erd-Akse wankt stetig zwischen zwei Punkten, einmal wärend ihrer Ban, das macht die Erscheinung. Wenn die Erde inner der Sonne eigenen Ban läuft, so muß die Sonne einen größern Bogen ihrer WinkelBan in derselben Zeit zu beschreiben scheinen, als sie außer der Sonne eigenen Ban einen kleinern WinkelBogen zu beschreiben scheint, wie aber die Zeit sich gleich ist, so sind auch die Theile der Ban, die sie in beiden sich gleichen Zeiten beschreibt, sich gleich. Dies gilt auch vom Mond in Hinsicht der Bögen seiner WinkelBan verglichen mit den Bögen seiner EpizikelBan im absoluten Raume. Da der Mond bald inner der Erd-Ban und der SonnenBan, bald außer jener und inner dieser, bald außer jener und außer dieser, bald inner jener und außer dieser läuft; so müssen daraus scheinbar die höchsten Ungleichheiten in Hinsicht der Größe der Winkel-Ban entstehen, obgleich die größte Gleichheit in der Ban selbst in jedem Momente statt findet. Und aus der Kon-

struktion von Epizikeln ergiebt sich die Ungleichheit der Dauer der vier JaresZeiten. — Aberation, Nutation und alles ergiebt sich aus der Einheit und Tendenz eines Körpers nach drei Dimensionen sich zu bewegen. Schon daß alle Sterne, von gleicher Breite, um die Erde eine EllipsenBan (von mer oder minder Ekzentrizität), deren kleine und große Akse in der großen und kleinen Akse der scheinbar elliptischen SonnenBan liegt, zu beschreiben scheinen, hätte darauf füren sollen, daß die erscheinende SonnenBan keine zwischen den Solstitien gezogene Ellipsen-Ban, sondern eine zwischen den Tag- und NachtGleichen gezogene EpizikelBan von Abend nach Morgen seŭ. — Schon daraus, daß die Erde stillstehend, Sonne, Planeten und Sterne die Erde umkreißend erscheinen, hätte der gerechte Zweifel sich erheben sollen, ob nicht alle Erscheinungen die Negationen von den Positionen wären? — Ob nicht der Aequator die ware Ekliktik und die Ekliptik der stetig sich ändernde und bewegende Aequator seŭ? weil Breiten unveränderlich sind. Sollten WeltKörper im ewig gleichen Kreißen sich umkreißen? nirgend ist sonst Stille-Stand, sondern entweder stetige Annäherung oder Entfernung. Sollten überhaupt Spiralen in kleinsten uns unmerklichen Erweiterungen oder Verengerungen nicht die Banen um den ZentralKörper seŭn?

In Ellipsen kann nur kreißen ein Körper, der zwei Körper zu Zentralen hat. Bei der Rektifikation der EpizikelBogen (nichts gemeines) durch bloße Algebra — werden die nötigen Formeln und Ausdrücke höchst simpel, nett und einfach. Die Entfernungen zweier BrennPunkte einer sogenannten elliptischen Ban ist die Chorde der zugleichen SonnenBan binnen einem Umlauf eines Planeten, woraus die SonnenBan zu bestimmen ist.

Ptolomäus, Hipparch und Eudoksus Ideen, berichtigt durch Kopernikus, standen der Warheit also näher, als Keppler, Newton und Laplace. Zur Ausarbeitung aus den Materialien des von selbst wiederaufgefundenen Süstems der Alten kann die höchste wonnevolle Anfeuerung zu Mitobservationen an einer guten Sterns-Warte oder durch vom Staate gesicherte frohe Muße seŭn. Durch ächt naturphilosophische Konstruktion ergeben sich diese Ideen als Gesetze der WeltKörperBanen. — Vernunft und Erfarung sprechen sie aus.

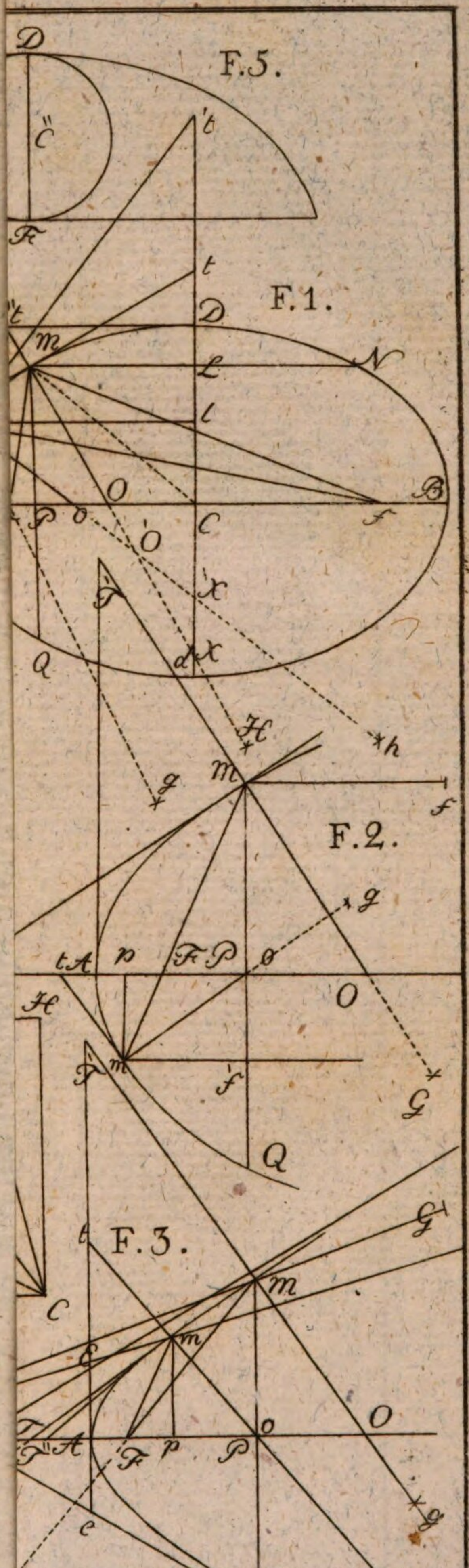
Dies nur einstweilen als einige Zweifel, und wie viel noch philosophisch durch neuesten Geist zu ergründen und aus einer geistvollen Dünamik zu begründen seü, und wie stark noch manches unsere gepriesenen Theorien zu bezweifeln übrig lassen.

Druckfeler.

S. 27. Z. 9. statt quers $(\alpha+\beta)$ lies $\sin(\alpha+\beta)$
— 38. — 7. v. u. st. $(8\infty+1)$, l. $(2\infty+1)$
— 63. — 19. st. — 1'C l. — 2'C
— 101. — 1. v. u. st. $uc^{-1}y^{-1}a^{-1}$ l. $ucy^{-1}a^{-1}$
— 105. — 6. u. 7. st. $\frac{y}{a}$ l. $\frac{y}{c}$.
— 114. — 3. v. u. st. (1 —) l. $\left(1-\frac{x}{2a}\right)$
— 120. — 3. v. u. add. auf
— 128. — 3. v. u. l. Zirkulosikation
— 171. — 17. st. $\sqrt{-1}.\sin z)$ l. $\sqrt{-1}.\sin z)^n$
— — — 1. v. u. st. sin.z l. sin.nz

Man setze in der innern taunadischen SeitenZal 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188 statt 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208

Die übrigen wird der Verständige gütigst seldst finden und verbessern.


D
C
F
t
t
t
D
m
e
N
l
O
B
f
C
o
O
x
x
Q
d
H
h
g
m
f
F.5.
F.1.
F.2.
F.3.
A
p
F
P
o
O
H
m
f
G
Q
G
C
m
m
e
o
O
A
F
p
P
g
R
O

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Werneburg, Johann Friedrich Christian,

Grundzüge von alten und neuen System der Mathematik

Leipzig u.a. 1805

Math.u. 208
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594357-6